Numeración Maya
Un sistema posicional de base 20

Edgar Anibal Cifuentes Anléu
Departamento de Física
Universidad de San Carlos de Guatemala

Enero de 2,006

1. La notación posicional del sistema decimal

El sistema numérico decimal que usamos cotidianamente es posicional y de base 10 eso significa que por ejemplo el número 785 es la abreviación del número

$$\begin{aligned}\left(7\times 10^2\right)+\left(8\times 10^1\right)+\left(5\times 10^0\right) &= \qquad (1)\\ (7\times 100)+(8\times 10)+(5\times 1) &= \\ 700+80+5 &= \end{aligned}$$

$$= 785$$

es decir 7 cientos mas 8 decenas mas cinco unidades.

Ser de base 10 significa que tenemos 10 símbolos diferentes que podemos colocar en cada posición y éstos son:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Ser un sistema posicional significa que la posición que los números tienen cuando son escritos es importante siendo las unidades las primeras que aparecen a la derecha, luego las decenas, a continuación las centenas, los millares, etc.

1 000 000 100 000 10 000 1 000 100 10 1

El número 31 524 tiene 5 cifras y se escribe explícitamente así:

$$3\times 10^4+1\times 10^3+5\times 10^2+2\times 10^1+4\times 10^0 = 31\ 524$$

y es equivalente por supuesto a 31,524 en su representación habitual

$$\begin{aligned}3\times 10\ 000+1\times 1\ 000+5\times 100+2\times 10+4\times 1 &= \\ 30\ 000+1\ 000+500+20+4 &= \end{aligned}$$

$$= 31\ 524$$

1.1. La suma

Una suma escrita de manera completa se vería asi:

$$324+57=$$

$$\begin{aligned} &= \left[3\times 10^2+2\times 10^1+4\times 10^0\right] && (2)\\ &\quad +\left[5\times 10^1+7\times 10^0\right] && (3)\\ &= (3+0)\times 10^2+(2+5)\times 10^1+(4+7)\times 10^0 \\ &= (3)\times 10^2+(7)\times 10^1+(11)\times 10^0 \end{aligned}$$

en el primer paréntesis (de derecha a izquierda) hemos obtenido 11 que no es ninguno de los símbolos base del sistema decimal; entonces decimos que ponemos 1 y llevamos 1. En la siguiente línea sumamos el que llevabamos a la cifra siguiente $(7+1)$.

$$\begin{aligned} &= (3)\times 10^2+(7+1)\times 10^1+(1)\times 10^0 \\ &= (3)\times 10^2+(8)\times 10^1+(1)\times 10^0 = 381 \end{aligned}$$

1.1.1. Resta

La resta es un caso particular de la suma, como puede notarse en el siguiente ejemplo.

Realice la operación $125 - 37$

$$125 - 37 =$$

$$\begin{aligned} = & \left[1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0\right] - \\ & \left[3 \times 10^1 + 7 \times 10^0\right] \end{aligned}$$

$$= (1+0) \times 10^2 + (2-3) \times 10^1 + (5-7) \times 10^0$$

Acá hemos usado el algoritmo usual como no podemos restar 7 de 5 y obtener un número positivo entonces tomamos prestada una decena de la cifra anterior y realizamos la operación $(15-7)$ eso significa que debemos restar uno a la decena que se convierte en $(2-4)$

$$\begin{aligned} = & \ (1+0) \times 10^2 + (2-4) \times 10^1 + (15-7) \times 10^0 \\ = & \ (1+0) \times 10^2 + (2-4) \times 10^1 + (8) \times 10^0 \end{aligned}$$

pero como aca de nuevo necesitamos prestar a la cifra superior entonces repetimos el procedimiento, prestando uno a la centena que se queda en cero y las decenas quedan en $(12-4)$.

$$\begin{aligned} = & \ (1-1) \times 10^2 + (12-4) \times 10^1 + (8) \times 10^0 \\ = & \ (0) \times 10^2 + 8 \times 10^1 + (8) \times 10^0 \\ = & \ 80 + 8 = 88 \end{aligned}$$

2. El sistema binario

El sistema numérico mas simple es el sistema binario, su base es 2 y los únicos símbolos que necesitamos son

$$1 \quad 0$$

y las posiciones representan potencias de 2 como sigue

8	7	6	5	4	3	2	1
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
128	64	32	16	8	4	2	1

Los números de 1 al 12 se presentan a continuación tanto en el sistema decimal como el binario

1	1×2^0	1	1
2	$1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$	$10+0$	10
3	$1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$	$10+1$	11
4	$1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$	$100+0+0$	100
5	$1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$	$100+0+1$	101
6	$100+10+0$		110
7	$100+10+1$		111
8	$1000+0+0+0$		1000
9	$1000+0+0+1$		1001
10	$1000+0+1+0$		1010
11	$1000+0+1+1$		1011
12	$1000+100+0+0$		1100

los números del 1 al 5 están expresados en forma completa y luego del 6 al 12 solo en forma parcial.

Ahora comencemos por desglosar el mayor de estos números como lo hicimos en la ecuación 1

$$\begin{aligned} 1100 & \sim 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\ & = 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 0 \times 1 \\ & = 8 + 4 + 0 + 0 = 12 \end{aligned}$$

es decir 1100 (binario) es equivalente a 12 (decimal) $(1100_{binario} \sim 12_{decimal})$

Como un segundo ejemplo veamos el número 111 que según la tabla es equivalente a 7

$$\begin{aligned} 111 & \sim 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ & = 1 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 1 \\ & = 4 + 2 + 1 = 7 \end{aligned}$$

Los números grandes tienen una enorme cantidad de cifras escribamos por ejemplo 2005

$$\begin{aligned} = & \ 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 \\ & +1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 \\ & +0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1\times1024+1\times512+1\times256+1\times128\\
&\quad +1\times64+0\times32+1\times16+0\times8\\
&\quad +1\times4+0\times2+1\times1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 1024+512+256+128+64\\
&\quad +0+16+0+4+0+1\\
&= 2005
\end{aligned}
$$

El sistema binario que alguna vez se pensó que solo era un juego matemático interesante es la base del funcionamiento de los sistemas digitales desde una simple llave electrónica hasta la mas sofisticada computadora.

2.1. La suma

Por ejemplo una computadora para sumar 7 + 3 sigue la siguiente secuencia

$$111+11=$$

$$
\begin{aligned}
&= (1+0)\times2^2+(1+1)\times2^1+(1+1)\times2^0\\
&= (1)\times2^2+(2)\times2^1+(2)\times2^0\\
&= (1)\times2^2+(2+1)\times2^1+(2)\times2^0\\
&= (1)\times2^2+(3)\times2^1+(0)\times2^0\\
&= (1+1)\times2^2+(1)\times2^1+(0)\times2^0\\
&= (2)\times2^2+(1)\times2^1+(0)\times2^0\\
&= (1)\times2^3+(0)\times2^2+(1)\times2^1+(0)\times2^0\\
&= 1010
\end{aligned}
$$

hemos seguido una táctica semejante a la que usamos en la operación decimal de la ecuación 2. En la tercera línea obtuvimos 2 que no es parte de los símbolos base del sistema binario por lo que escribimos 0 y llevamos uno. En la cuarta línea agregamos el que llevabamos a la cifra siguiente y obtenemos tres, por lo que ahora escribimos uno y llevamos 1. En la línea siete de nuevo obtenemos dos entonces escribimos cero y agregamos una cifra mas.

resumiendo

$$
\begin{aligned}
\overset{binario}{111+11} &= \overset{binario}{1010}\\
\overset{decimal}{7+3} &= \overset{decimal}{10}\\
\overset{binario}{1010} &\sim \overset{decimal}{10}
\end{aligned}
$$

2.1.1. Resta

La resta también es un caso particular de la suma

$$1001-100=$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-0)\times2^3+(0-1)\times2^2\\
&\quad +(0-0)\times2^1+(1-0)\times2^0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-0)\times2^3+(0-1)\times2^2+0\times2^1+1\times2^0\\
&= (0-0)\times2^3+(2-1)\times2^2+0\times2^1+1\times2^0\\
&= 0\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0\\
&= 0101=101
\end{aligned}
$$

en notación decimal es

$$9-4=5$$

2.2. ¿Cómo convertimos decimal a binario?

Para convertir un numero en sistema decimal a binario procedemos como sigue:

Ejemplo

Convertir 267 a binario. En la siguiente tabla están las sucecivas potencias de 2

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
1	2	4	8	16	32	64	128	256

vemos que $2^8 > 251$ entonces empezamos realizando las operaciones a partir de 2^7

$$
\begin{aligned}
\frac{251}{128} &= 1.9609 \to 1\\
251 mod 128 &= 123\\
\frac{123}{64} &= 1.9219 \to 1\\
123 mod 64 &= 59\\
\frac{59}{32} &= 1.8438 \to 1\\
59 mod 32 &= 27\\
\frac{27}{16} &= 1.6875 \to 1\\
27 mod 16 &= 11\\
\frac{11}{8} &= 1.375 \to 1\\
11 mod 8 &= 3\\
\frac{3}{4} &= 0{,}75 \to 0\\
\frac{3}{2} &= 1{,}5 \to 1\\
3 mod 2 &= 1 \to 1
\end{aligned}
$$

$$251_{decimal} \sim 11111011$$

Por supuesto que es mejor pensar que $11111111 \sim 255$ es decir uno menos de $100000000 \sim 256$. Ahora si le quitamos 4 a 255 significa quitar el tercer uno, desde la derecha, que como ya sabemos corresponde a 4 de alli $251 \sim 11111011$. Sin embargo hemos usado la forma completa para ejemplificar el procedimiento general.

3. El sistema maya de numeración

El sistema maya de numeración usa el 20 en lugar del 10 como base y los 20 símbolos diferentes en cada posición son:

𝋡	𝋢	𝋣	𝋤	𝋥
𝋦	𝋧	𝋨	𝋩	𝋪
𝋫	𝋬	𝋭	𝋮	𝋯
𝋰	𝋱	𝋲	𝋳	𝋠

Que corresponden a:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	0

note que en este caso solo tenemos 3 simbolos (|𝋡|, |𝋥|, |𝋠|) $\sim (1,5,0)$ pero los símbolos de la base no son estos tres sino los veinte que aparecen en la tabla.

La tabla siguiente presenta los primeros veinte números de la numeración maya

𝋡	𝋢	𝋣	𝋤	𝋥
𝋦	𝋧	𝋨	𝋩	𝋪
𝋫	𝋬	𝋭	𝋮	𝋯
𝋰	𝋱	𝋲	𝋳	𝋡 𝋠

Que corresponden a:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

Otra diferencia entre el sistema maya y el decimal es que las cifras posicionales no son horizontales sino verticales como puede notarse en 20 y en la siguiente tabla con los números del 21 al 40. Primero en la notación maya original y luego en la notación "moderna" que hemos preferido hacerla posicional horizontal.

𝋡 𝋡	𝋡 𝋢	𝋡 𝋣	𝋡 𝋤	𝋡 𝋥
𝋡 𝋦	𝋡 𝋧	𝋡 𝋨	𝋡 𝋩	𝋡 𝋪
𝋡 𝋫	𝋡 𝋬	𝋡 𝋭	𝋡 𝋮	𝋡 𝋯
𝋡 𝋰	𝋡 𝋱	𝋡 𝋲	𝋡 𝋳	𝋢 𝋠

[1,1] , [1,2] , [1,3] , [1,4] , [1,5] , [1,6] , [1,7] , [1,8] ,
[1,9] , [1,10] , [1,11] , [1,12] , [1,13] , [1,14] , [1,15] ,
[1,16] , [1,17] , [1,18] , [1,19] , [2,0]

el número |𝋡 / 𝋡| $= [1,1] \sim 21$ es $1 \times 20^1 + 1 \times 20^0 = 20 + 1 = 21$

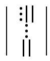
el número |𝋡 / 𝋭| $= [1,13] \sim 33$ es $1 \times 20^1 + 13 \times 20^0 = 20 + 13 = 33$

Ahora un número de 3 cifras

|𝋭 / 𝋣 / 𝋪|$_{maya}$ = [13,3,10]

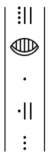
al sistema decimal

$$
\begin{aligned}
&= 13 \times 20^2 + 3 \times 20^1 + 10 \times 20^0 \\
&= 13 \times 400 + 3 \times 20 + 10 \times 1 \\
&= 5200 + 60 + 10 = 5270
\end{aligned}
$$



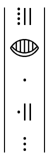
$_{maya} \sim 5270_{decimal}$

otro ejemplo ahora de 5 cifras



$_{maya} = [14,0,1,11,3]$

$$
\begin{aligned}
&= 14 \times 20^4 + 0 \times 20^3 + 1 \times 20^2 + 11 \times 20^1 + 3 \\
&= 14 \times 160\,000 + 0 \times 8000 + 1 \times 400 + 11 \times 20 + 3 \\
&= 2240\,000 + 0 + 400 + 220 + 3 = 2240\,623
\end{aligned}
$$



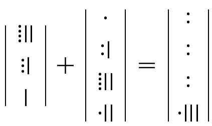
$_{maya} \sim 2240\,623_{decimal}$

3.1. La suma

Para sumar solo sumamos los valores de las cifras correspondiente

$$
\begin{aligned}
&= [14,8,5] + [1,7,14,11] \\
&= [(0+1) \,.\, (14+7) \,.\, (8+14) \,.\, (5+11)] \\
&= [2,2,2,16]
\end{aligned}
$$

en notación clásica



en el sistema decimal

$$
\begin{aligned}
14 \times 400 + 8 \times 20 + 5 &= 5765 \\
1 \times 8000 + 7 \times 400 + 14 \times 20 + 11 &= 11\,091 \\
5765 + 11\,091 &= 16\,856 \\
2 \times 8000 + 2 \times 400 + 2 \times 20 + 16 &= 16\,856
\end{aligned}
$$

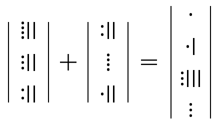
con lo que confirmamos que la operación es correcta.

Otro ejemplo

$$[14,13,12] + [12,4,11] =$$

$$
\begin{aligned}
&= [(14+12) \,.\, (13+4) \,.\, (12+11)] \\
&= [(26) \,.\, (17) \,.\, (23)] \\
&= [(1) \,.\, (6) \,.\, (18) \,.\, (3)]
\end{aligned}
$$

note que en el pasaje a al ultima línea el 23 se redujo a 3 y le agregamos una unidad a la cifra siguiente y el 26 pasó a 6 agregando una cifra mas; de la misma forma como acostumbramos hacer en la notación decimal.



confirmando en notación decimal

$$
\begin{aligned}
14 \times 400 + 13 \times 20 + 12 &= 5872 \\
12 \times 400 + 4 \times 20 + 11 &= 4891 \\
5872 + 4891 &= 10\,763 \\
1 \times 20^3 + 6 \times 400 + 18 \times 20 + 3 &= 10\,763
\end{aligned}
$$

3.2. Transformación de decimal a maya

Para transformar un número en sistema decimal a maya procedemos de manera semejante a como lo hicimos en el caso de decimal a binario.

Por ejemplo transformemos el número 12,579 a notación maya.

Primero recordemos a cuanto corresponden las primeras potencias de 20

$$
\begin{aligned}
20^1 &= 20, \qquad 20^2 = 400 \\
20^3 &= 8000, \qquad 20^4 = 160\,000
\end{aligned}
$$

por lo tanto es evidente que solo serán necesarias 4 cifras; empecemos

$$\begin{aligned}
\frac{12579}{8000} &= 1.5724 \quad \rightarrow \mathbf{1} \\
12579 mod 8000 &= 4579 \\
\frac{4579}{400} &= 11.448 \quad \rightarrow \mathbf{11} \\
4579 mod 400 &= 179 \\
\frac{179}{20} &= 8.95 \quad \rightarrow \mathbf{8} \\
179 mod 20 &= 19 \quad \rightarrow \mathbf{19}
\end{aligned}$$

entonces

$$12579 \sim [1{,}11{,}8{,}19] = \begin{vmatrix} \cdot \\ \text{·||} \\ \text{⁝|} \\ \text{⁞|||} \end{vmatrix}$$

Ahora hagámoslo para el número 1821. Es suficiente con tres cifras para escribir el número y será

$$\begin{aligned}
\frac{1821}{400} &= 4.5525 \quad \rightarrow \mathbf{4} \\
1821 mod 400 &= 221 \\
\frac{221}{20} &= 11{,}05 \quad \rightarrow \mathbf{11} \\
221 mod 11 &= 1 \quad \rightarrow \mathbf{1}
\end{aligned}$$

entonces

$$1821 \sim [4{,}11{,}1] = \begin{vmatrix} \text{⁞} \\ \text{·||} \\ \cdot \end{vmatrix}$$

4. La numeración en el calendario

La cuenta larga del calendario maya hace una modificación a la regla del uso del 20 como base. Esta modificación se debe a que la duración del año es poco mas de 365 días y 400 es mucho mas grande

$$\begin{aligned}
20^2 &= 20 \times 20 = 400 \\
18 \times 20 &= 360 \simeq 365
\end{aligned}$$

en tanto que 360 es mucho mas cercano a 365. Por lo tanto se usa

$20^4 \times 18$	$20^3 \times 18$	$20^2 \times 18$	18×20	20
2880 000	144 000	7200	360	20

entonces el número 1821 es:

$$\begin{aligned}
\frac{1821}{360} &= 5.0583 \quad \rightarrow 5 \\
1821 mod 360 &= 21 \\
\frac{21}{20} &= 1.05 \quad \rightarrow 1 \\
21 mod 20 &= 1 \quad \rightarrow 1
\end{aligned}$$

$$[5{,}1{,}1] = \begin{vmatrix} \text{|} \\ \cdot \\ \cdot \end{vmatrix}$$

Usualmente los números de la cuenta larga son de 5 cifras pues el inicio hipotético del calendario es muy remoto como es el caso de 1846 512 que resulta equivalente a

$$\begin{aligned}
\frac{1846\,512}{144\,000} &= 12.823 \rightarrow 12 \\
1846\,512 mod 144\,000 &= 118\,512 \\
\frac{118\,512}{7200} &= 16.46 \rightarrow 16 \\
118\,512 mod 7200 &= 3312 \\
\frac{3312}{360} &= 9.2 \rightarrow 9 \\
3312 mod 360 &= 72 \\
\frac{72}{20} &= 3.6 \rightarrow 3 \\
72 mod 20 &= 12 \rightarrow 12
\end{aligned}$$

entonces

$$1846\,512 \sim [12{,}16{,}9{,}3{,}12] = \begin{vmatrix} \text{:||} \\ \text{·|||} \\ \text{⁞|} \\ \vdots \\ \text{:||} \end{vmatrix}$$

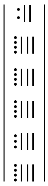
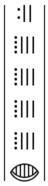
Para hacer la operación inversa se procede así:

Convertir $[12{,}19{,}19{,}17{,}19] = \begin{vmatrix} \text{:||} \\ \text{⁞|||} \\ \text{⁞|||} \\ \text{⁞|||} \\ \text{:|||} \\ \text{⁞|||} \end{vmatrix}$ a notación decimal

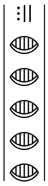
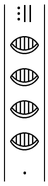
$$\begin{aligned}
&= 12 \times 144\,000 + 19 \times 7200 \\
&\quad +19 \times 360 + 17 \times 20 + 19
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1728\,000 + 136\,800 + 6840 + 340 + 19 \\
&= 1871\,999
\end{aligned}
$$

los dos días siguientes no son

[12,19,19,18,0 = ] , [12,19,19,18,1 = ]

como sería en la notación numérica habitual sino

[13,0,0,0,0 = ] , [13,0,0,0,1 = ]

debido a que 360 no lo anotamos como 18×20 en la segunda cifra sino como 1×360 en la tercera cifra. Siendo por supuesto ésta la diferencia entre la notación habitual y la notación calendárica.

El número 1871 999 es el número de días transcurridos desde el inicio del calendario maya y corresponde aproximadamente a 5125. 4 años.