Física para estudiantes de Medicina I
Matemáticas

Edgar Anibal Cifuentes Anléu
Facultad de Ciencias Médicas
Universidad de San Carlos de Guatemala

Enero de 2,006

Este es un repaso de algunos temas de matemática para estudiantes de primer año de medicina. Los temas están ordenados de acuerdo al actual programa del curso.

Para poder resolver los problemas de física que serán planteados a lo largo de todo el curso, es necesario tener dominio de estos temas de matemática.

1 Los números

Constantes

Las constantes son valores conocidos o desconocidos, como los números enteros

$$1, 2, 4, 10, 10000, \ldots$$

los números racionales,

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{125}{7}, \ldots$$

los números reales,

$$10^{-4}, 1.2345, e, \pi, \sqrt{15}, \tfrac{\sqrt{26}}{3}, \ldots$$
$$10^3, 3.45 \times 10^{12}, \tfrac{10^4}{96}, ...$$

ó las constantes o variables desconocidas

$$a, b, c, d, e, ...$$

En este último caso, se acostumbra usar las primeras letras del alfabeto para representar dichas constantes.

Incognitas

Valores desconocidos que generalmente pueden llegar a conocerse al resolver una ecuación, usualmente usamos las últimas letras del alfabeto para representarlas

$$v, w, x, y, z$$

La Igualdad

El signo (=) de igualdad es vital en las operaciones que realizaremos para resolver ecuaciones. En todas las operaciones debemos estar seguros de que lo que hay en ambos lados del signo de igualdad sea en efecto la misma cantidad. Todas la operaciones que no alteren la igualdad son permitidas por ejemplo la suma de la misma cantidad en ambos lados

$$\begin{aligned} 6 &= 6 \\ 6+3 &= 6+3 \\ 9 &= 9 \end{aligned}$$

note que $6 \neq 9$ pero eso no es importante, lo importante es que de ambos lados del signo de igualdad hay 9; también podemos restar

$$\begin{aligned} 9 &= 9 \\ 9-4 &= 9-4 \\ 5 &= 5 \end{aligned}$$

también podemos multiplicar

$$\begin{aligned} 5 \times 8 &= 5 \times 8 \\ 40 &= 40 \end{aligned}$$

dividir

$$\begin{aligned}\frac{40}{10} &= \frac{40}{10} \\ 4 &= 4\end{aligned}$$

extraer raíz cuadrada

$$\begin{aligned}4 &= 4 \\ \sqrt{4} &= \sqrt{4} \\ 2 &= 2\end{aligned}$$

y elevar a un exponente

$$\begin{aligned}2 &= 2 \\ 2^5 &= 2^5 \\ 32 &= 32\end{aligned}$$

hay otras operaciones que se pueden realizar pero nos detendremos aquí.

2 Ecuaciones de primer grado con una incognita

Se denominan ecuaciones de primer grado con una incognita a áquellas que tienen la forma general

$$ax + b = 0$$

donde x es la incognita, mientras a y b son constates, que se presumen conocidas. Para resolver este tipo de ecuaciones todo lo que tenemos que hacer es despejar el valor desconocido haciendo uso de todas las operaciones necesarias que no alteren la igualdad.

Ejemplo 1

Resuelva la siguiente ecuación

$$6x - 4 = 5x$$

Solución: esta ecuación tiene una única incognita que es x, cuyo valor puede encontrarse de la siguiente manera: Sumamos 4 de cada lado de la ecuación

$$\begin{aligned}6x - 4 + 4 &= 5x + 4 \\ 6x &= 5x + 4\end{aligned}$$

y luego restamos $5x$ de ambos lados de la ecuación

$$\begin{aligned}6x - 5x &= 5x + 4 - 5x \\ 6x - 5x &= 4\end{aligned}$$

realizando las operaciones indicadas se reduce a

$$\begin{aligned}6x - 5x &= 4 \\ x &= 4\end{aligned}$$

por lo tanto el valor de la incognita resulta ser $x = 4$.

No es indispensable pero si recomendable comprobar el resultado obtenido sustituyendo el valor encontrado en la ecuación original

$$\begin{gathered}6\,(4) - 4 = 5\,(4) \\ 24 - 4 = 20 \\ 20 = 20\end{gathered}$$

y efectivamente se verifica la igualdad.

Recuerde lo importante en todo el proceso es mantener la igualdad.

Ejemplo 2

Encuentre el valor de y en la ecuación

$$7(y - 1) = 2 - 5y$$

Solución: primero realizamos la multiplicación indicada

$$7y - 7 = 2 - 5y$$

y luego siguiendo los mismos pasos que en el ejemplo anterior se tiene:

$$\begin{gathered}7y - 7 + 7 = 2 - 5y + 7 \\ 7y = 9 - 5y \\ 7y + 5y = 9 - 5y + 5y \\ 12y = 9 \\ y = \tfrac{9}{12} \\ y = \tfrac{3}{4}\end{gathered}$$

comprobando

$$\begin{gathered}7\left(\left(\tfrac{3}{4}\right) - 1\right) = 2 - 5\left(\tfrac{3}{4}\right) \\ 7\left(\tfrac{3}{4} - \tfrac{4}{4}\right) = 2 - \tfrac{15}{4} \\ 7\left(-\tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{8}{4} - \tfrac{15}{4} \\ -\tfrac{7}{4} = -\tfrac{7}{4}\end{gathered}$$

Ejemplo 3

Encuentre el valor de x de la ecuación

$$\frac{3(x-5)}{4} = 5x - \frac{7}{2}$$

Solución: primero simplificamos

$$\begin{aligned}
\frac{3x-15}{4} &= 5x - \frac{7}{2} \\
\frac{3}{4}x - \frac{15}{4} &= \frac{20x}{4} - \frac{14}{4} \\
\frac{3}{4}x - \frac{15}{4} + \frac{15}{4} - \frac{20x}{4} &= \frac{20x}{4} - \frac{14}{4} + \frac{15}{4} - \frac{20x}{4} \\
-\frac{17}{4}x &= \frac{1}{4} \\
x &= -\frac{1}{17}
\end{aligned}$$

este problema también puede ser resuelto de forma aproximada así

$$\begin{aligned}
0.75x - 3.75 &= 5x - 3.5 \\
0.75x - 3.75 + 3.75 - 5x &= 5x - 3.5 + 3.75 - 5x \\
-4.25x &= 0.25 \\
x &= \frac{0.25}{-4.25} \\
x &= -5.8824 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

haremos la prueba con el primer resultado

$$\begin{aligned}
\frac{3\left(-\frac{1}{17}\right) - 15}{4} &= 5\left(-\frac{1}{17}\right) - \frac{7}{2} \\
\frac{-\frac{3}{17} - 15}{4} &= -\frac{5}{17} - \frac{7}{2} \\
-\frac{129}{34} &= -\frac{129}{34}
\end{aligned}$$

y con el segundo resultado

$$\begin{aligned}
& 0.75\left(-5.8824 \times 10^{-2}\right) - 3.75 \\
= \quad & 5\left(-5.8824 \times 10^{-2}\right) - 3.5 \\
& -4.4118 \times 10^{-2} - 3.75 \\
= \quad & -0.29412 - 3.5
\end{aligned}$$

$$-3.7941 = -3.7941$$

y podemos confirmar que

$$-\frac{129}{34} = -3.794117647\cdots \approx -3.7941$$

cuando conservamos suficientes decimales en la división, de no hacerlo estos resultados empiezan a diferir.

Ejemplo 4

Encuentre el valor de x en

$$\frac{2x-3}{5} = \frac{-3x+4}{7}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{2x-3}{5} &= \frac{-3x+4}{7} \\
0.4x - 0.6 &= -0.42857x + 0.57143 \\
0.4x + 0.42857x &= 0.6 + 0.57143 \\
0.82857x &= 1.1714 \\
x &= 1.4138
\end{aligned}$$

comprobando con 2 decimales

$$\begin{aligned}
\frac{2 \times 1.41 - 3}{5} &\stackrel{?}{=} \frac{-3 \times 1.41 + 4}{7} \\
\frac{2.82 - 3}{5} &\stackrel{?}{=} \frac{-4.23 + 4}{7} \\
\frac{-0.18}{5} &\stackrel{?}{=} \frac{-0.23}{7} \\
-0.036 &\neq -0.032857
\end{aligned}$$

y vemos que los dos números son aproximadamente iguales, pero no son iguales, sin embargo es solo un error de aproximación como podemos verificar al tomar mas (3) decimales

$$\begin{aligned}
\frac{2 \times 1.413 - 3}{5} &\stackrel{?}{=} \frac{-3 \times 1.413 + 4}{7} \\
-0.0348 &\neq -0.034143
\end{aligned}$$

si luego tomamos 4 entonces ya no hay error apreciable

$$\begin{aligned} \frac{2\times 1.4138-3}{5} &\stackrel{?}{=} \frac{-3\times 1.4138+4}{7} \\ -.0\,345 &= -0.03\,45 \end{aligned}$$

la respuesta exacta es $x = -\frac{41}{29} = -1.413793103448\ldots$ y con 4 decimales ya no tiene error apreciable.

Ejemplo 5

Resuelva

$$7x - 8 = 5 + 2x$$

Solución: el valor de x que resuelve el problema es $x = \frac{13}{5} = 2.6$, encuéntrelo y verifíquelo

3 Ecuaciones de primer grado con dos incognitas

La forma típica (ya reducida) de las ecuaciones de primer grado con dos incognitas es:

$$\begin{array}{ll} ax + by = c & \text{Ecuación 1} \\ dx + ey = f & \text{Ecuación 2} \end{array}$$

donde a, b, c, d, e y f son constantes que se presumen conocidas y x y y son las incognitas, que deben encontrarse. Para resolver este sistema de ecuaciones el procedimiento es el siguiente:

1. Se despeja el valor de una cualquiera de las incognitas de la primera ecuación.
2. Se sustituye el valor despejado de la primera ecuación en la segunda ecuación.
3. Al quedar ahora la segunda ecuación sólo en términos de una incognita, se procede a despejar ésta.
4. Para finalizar se sustituye en la primera ecuación el valor despejado de la segunda y se despeja la incognita restante.

Aplicaremos estos 4 pasos al ejemplo 6 para llegar a la solución.

Ejemplo 6

Encuentre los valores de x y y en el siguiente sistema de ecuaciones. Note que las ecuaciones ya se encuentran en la forma reducida

$$\begin{gathered} 8x - 3y = 2 \\ -6x + 5y = 0 \end{gathered}$$

Solución

1. Siguiendo el paso uno despejamos x de la primera ecuación

$$\begin{gathered} 8x = 2 + 3y \\ x = \frac{2+3y}{8} \end{gathered}$$

2. ahora en el segundo paso sustituimos el valor de x en la segunda ecuación

$$-6\left(\frac{2+3y}{8}\right) + 5y = 0$$

3. en el tercer paso despejamos la variable y

$$\begin{gathered} \frac{-12-18y}{8} = -5y \\ -12 - 18y = -40y \\ 40y - 18y = 12 \\ y = \frac{12}{22} = \frac{6}{11} \end{gathered}$$

4. por último sustituimos el recién encontrado valor de y en la primera ecuación para encontrar el valor de x

$$\begin{gathered} 8x - 3\left(\frac{6}{11}\right) = 2 \\ 8x = 2 + \frac{18}{11} \\ 8x = \frac{22+18}{11} = \frac{40}{11} \end{gathered}$$

$$x = \frac{5}{11} \qquad\qquad y = \frac{6}{11}$$

y el problema está resuelto con $x = \frac{5}{11}$ y $y = \frac{6}{11}$. Aunque el problema aquí está terminado, vale la pena probar la respuesta, sustituyendo los valores encontrados de x y y.

$$\begin{aligned} -6\left(\frac{5}{11}\right) + 5\left(\frac{6}{11}\right) &= 0 \\ -\frac{30}{11} + \frac{30}{11} &= 0 \end{aligned}$$

con lo que queda comprobado el resultado en la primera ecuación y

$$\begin{aligned} 8\left(\frac{5}{11}\right)-3\left(\frac{6}{11}\right) &= 2 \\ \frac{40}{11}-\frac{18}{11} &= 2 \\ \frac{22}{11} &= 2 \end{aligned}$$

también en la segunda. Las dos ecuaciones deben verificar el resultado.

Ejemplo 7

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{gathered} 5x+3y=4 \\ -4x-2y=6 \end{gathered}$$

Solución: Encontrando x

$$\begin{gathered} 3y=4-5x \\ y=\tfrac{4-5x}{3} \\ -4x-2\left(\tfrac{4-5x}{3}\right)=6 \\ -4x-\tfrac{8+10x}{3}=6 \\ -12x-8+10x=18 \\ -2x=26 \\ x=-\tfrac{26}{2}=-13 \end{gathered}$$

encontrando y

$$y=\frac{4-5(-13)}{3}=\frac{4+65}{3}=23$$

y finalmente comprobando

$$\begin{gathered} 5\,(-13)+3\,(23)=4 \\ -65+69=4 \\ 4=4 \\ -4\,(-13)-2\,(23)=6 \\ 52-46=6 \\ 6=6 \end{gathered}$$

Ejemplo 8

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{gathered} 5x+3y=8 \\ 3x-2y=7 \end{gathered}$$

Solución: ahora vamos a resolver el sistema en forma aproximada

$$\begin{aligned} 5x+3y &= 8 \\ x &= -\frac{3}{5}y+\frac{8}{5} \\ x &= -0.6y+1.6 \end{aligned}$$

sustituyendo en la segunda ecuación

$$\begin{aligned} 3\,(-0.6y+1.6)-2y &= 7 \\ 4.8-3.8y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3.8y &= 7-4.8 \\ -3.8y &= 2.2 \\ y &= -0.57895 \end{aligned}$$

y regresando a la primera ecuación

$$\begin{aligned} x &= -0.6\,(-0.57895)+1.6 \\ x &= 1.9474 \end{aligned}$$

comprobando

$$\begin{gathered} 5\,(1.9474)+3\,(-0.57895)=8.000\,2\simeq 8 \\ 3\,(1.9474)-2\,(-0.57895)=7.000\,1\simeq 7 \end{gathered}$$

los valores encontrados son precisos con tres decimales y corresponden a los valores exactos $x=\frac{37}{19}$ y $y=-\frac{11}{19}$

Ejemplo 9

Resolver el sistema

$$\begin{gathered} 12x+y=2x+8-2y \\ 3x-5y+6=7-6y \end{gathered}$$

Solución: en este caso aún no están en su forma reducida por lo cual primero la escribimos de esa forma

$$\begin{gathered} 10x+3y=8 \\ 3x+y=1 \end{gathered}$$

ahora seguimos los cuatro pasos que hemos usado en los ejemplos anteriores

$$\begin{aligned} 10x+3y &= 8 \\ x &= \frac{4}{5}-\frac{3}{10}y \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación 2

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{10}y\right)+y &= 1 \\ y &= -14 \end{aligned}$$

y volviendo a la ecuación 1

$$\begin{aligned} x &= \frac{4}{5}-\frac{3}{10}(-14) \\ x &= 5 \end{aligned}$$

confirmando

$$\begin{gathered} 12(5)+(-14)=2(5)+8-2(-14) \\ 3(5)-5(-14)+6=7-6(-14) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 46=46 \\ 91=91 \end{gathered}$$

Ejemplo 10

Resuelva el sistema

$$\begin{gathered} 10x+5y=2x+6-2y \\ 8x-5y+6=4-9y \end{gathered}$$

Solución: es $x=-\frac{19}{12}=-1.583\,3$ y $y=\frac{8}{3}=2.666\,7$ verifíquelo.

4 Ecuaciones de segundo grado con una incognita

Las ecuaciones de segundo grado con una incognita tienen la siguiente forma general

$$ax^2+bx+c=0$$

donde a,b y c son constantes que se suponen conocidas y x es la incognita que queremos encontrar. La solución de este tipo de ecuación tiene la forma general

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

con la condición de que el número $\sqrt{b^2-4ac}$ tenga un valor positivo, para que la respuesta pueda ser real.

Ejemplo 11

Encuentre el valor de x en la ecuación

$$2x^2+8x-45=0$$

Solución: **i**dentificando los valores encontramos $a=2$, $b=8$ y $c=-45$, entonces se sutituyen en la solución general así

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{-8\pm\sqrt{8^2-4(2)(-45)}}{2\times 2} \\ x &= \tfrac{-8\pm\sqrt{64+360}}{4} \\ &\simeq \tfrac{-8\pm 20.59}{4} \end{aligned} \quad\rightarrow\quad \left\{ \begin{gathered} x_1=\tfrac{-8+20.59}{4} \\ x_1=\tfrac{12.\,59}{4} \\ x_1=3.\,15 \\ x_2=\tfrac{-8-20.59}{4} \\ x_2=\tfrac{-28.\,59}{4} \\ x_2=-7.\,15 \end{gathered} \right.$$

de tal forma que las dos soluciones finales son aproximadamente $x_1=3.15$ y $x_2=-7.15$. Las soluciones son aproximadas porque no tomamos todos los decimales. Al comprobar el resultado se obtiene

$$\begin{gathered} 2\left(3.15\right)^2+8\left(3.15\right)-45=0 \\ 19.84+25.20-45=0 \\ 0\approx 0.04 \end{gathered}$$

al usar 4 decimales las respuestas son

$x_1=3.1478 \qquad x_2=-7.1478$

$$\begin{gathered} 2\left(3.1478\right)^2+8\left(3.1478\right)-45=0 \\ 19.8173+25.1824-45=0 \\ 44.9997-45=0 \\ -0.0003\approx 0 \end{gathered}$$

entonces la aproximación es mejor. Si tomaramos todos (algunas veces infinitos) los decimales entonces la respuesta sería exacta.

Ejemplo 12

Encuentre el valor de x en la ecuación

$$\left(3-x\right)\left(4x-2\right)+5x=-16$$

Solución: primero realizamos las operaciones indicadas para llevarla a la forma standard

$$\begin{gathered} 12x-4x^2-6+2x+5x=-16 \\ -4x^2+17x+10=0 \end{gathered}$$

y luego se procede como en el anterior

$$\begin{aligned}x &= \tfrac{-17\pm\sqrt{(17)^2-4(-4)10}}{2(-4)}\\ x_1 &= \tfrac{-17+\sqrt{(17)^2-4(-4)10}}{2(-4)}\\ x_1 &= \tfrac{-17+\sqrt{449}}{-8}\\ x_1 &= -0.5237\\ x_2 &= \tfrac{-17-\sqrt{(17)^2-4(-4)10}}{2(-4)}\\ x_2 &= \tfrac{-17-\sqrt{449}}{-8}\\ x_2 &= 4.773\,7\end{aligned}$$

comprobando

$$\begin{aligned}-4\left(-0.5237\right)^2+17(-0.5237)+10 &= 0.0001\approx 0\\ -4\left(4.773\,7\right)^2+17(4.773\,7)+10 &= 5.324\times 10^{-5}\\ &\approx 0\end{aligned}$$

Ejemplo 13

Encuentre el valor de x en la ecuación

$$(2x-4)(3x-9)=0$$

Solución: primero desarrollamos el producto

$$6x^2-30x+36=0$$

entonces usando la ecuación general

$$\begin{aligned}x &= \tfrac{-(-30)\pm\sqrt{(-30)^2-4(6)36}}{2(6)}\\ x_1 &= \tfrac{30+6}{12}\\ x_1 &= 3\\ x_2 &= \tfrac{30-6}{12}\\ x_2 &= 2\end{aligned}$$

en algunos caso como en éste ejemplo es mas fácil resolver el problema igualando a cero los dos factores del la ecuación original pues para que en un producto el resultado sea cero es necesario que uno de los dos factores sea cero.

Así $2x-4=0$ despejando $x=2$ y usando el otro factor $3x-9=0$, despejando de nuevo $x=3$ que son las soluciones ya encontradas.

En la comprobación vemos con mayor facilidad que es el segundo método el mas efectivo en este caso

$$\begin{aligned}(2(2)-4)(3(2)-9) &= 0\\ (0)(-3.0) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2(3)-4)(3(3)-9) &= 0\\ (2)(0) &= 0\end{aligned}$$

Ejemplo 14

Encuentre el valor de x de la ecuación

$$7x-x(5-x)=4$$

Solución: es

$$\begin{aligned}x_1 &= \sqrt{5}-1=1.236\,1\\ x_2 &= -\sqrt{5}-1=-3.236\,1\end{aligned}$$

verifíquelo

Ejemplo 15

Encuentre el valor de x de la ecuación

$$(2x-8)(15-3x)=0$$

Solución: es $x_1=4$ y $x_2=5$ como puede verificarlo.

5 Potencias de 10

Cuando los números son muy grandes o muy pequeños resulta más conveniente usar la notación en potencias de 10. La estructura de esta notación es muy simple y puede notarse en las siguiente tabla de las potencias de 10 positivas

$$\begin{aligned}10^1 &= 10\\ 10^2 &= 100\\ 10^3 &= 1,000\\ 10^4 &= 10,000\\ 10^5 &= 100,000\\ 10^6 &= 1,000,000\\ 10^7 &= 10,000,000\\ 10^8 &= 100,000,000\\ 10^9 &= 1,000,000,000\end{aligned}$$

note que el exponente es el número de ceros que aparecen a continuación del 1. Siguiendo esta regla podemos notar que 10^{12} es 1 seguido de 12 ceros, es decir, 1,000,000,000,000.

La estructura de las potencias negativas es la siguiente

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$$
$$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0.01$$
$$10^{-3} = \frac{1}{1{,}000} = 0.001$$
$$10^{-4} = \frac{1}{10{,}000} = 0.0001$$
$$10^{-5} = \frac{1}{100{,}000} = 0.00001$$
$$10^{-6} = \frac{1}{1{,}000{,}000} = 0.000001$$
$$10^{-7} = \frac{1}{10{,}000{,}000} = 0.0000001$$

note que el exponente indica la posición, a continuación del punto decimal, que ocupa el uno luego de los ceros. Así el número 10^{-8} es 0.00000001 donde el uno aparece en la octava posición después del punto decimal. Finalmente para ser consistente con esta notación se define el número $10^0 = 1$

$$10^1 = 10$$
$$10^0 = 1$$
$$10^{-1} = 0.1$$

Los números que no son múltiplos o submultiplos de 10 también pueden ser escritos mediante este sistema como un producto indicado.

$$4,380,000 = 4.38 \times 10^6$$
$$632,000 = 6.32 \times 10^5$$
$$0.000032 = 3.2 \times 10^{-5}$$

existen muchas formas equivalentes de escribir un número en esta notación, por ejemplo

$$\mathbf{5_1 640,000 = 5.64 \times 10^6} =$$
$$56.4 \times 10^5 = 0.564 \times 10^7 =$$
$$564 \times 10^4 = 0.0564 \times 10^8 =$$
$$5,640 \times 10^3 = 0.00564 \times 10^9 =$$
$$56,400 \times 10^2 = 0.000564 \times 10^{10} =$$
$$564,000 \times 10^1 = 0.0000564 \times 10^{11}$$

en la primera línea aparece el número en forma *normal* y en la **forma standard** de la notación en potencias de 10. La forma standard es un entero, punto, algunos decimales, el signo de multiplicación y diez elevado a la potencia indicada, es decir $a.bcd \times 10^p$. A partir de la segunda línea vemos como se incrementa el valor del exponente a la derecha del signo de igualdad y como decrece a la izquierda. De tal forma que notamos que el punto decimal se corre a la derecha cuando decrece el exponente y a la izquierda cuando aumenta.

Sumas y restas

Las sumas y las restas entre números escritos en potencias de 10 son sencillas sólo en el caso de que el exponente sea el mismo.

$$a.bc \times 10^d + e.fg \times 10^d =$$

$$(a.bc + e.fg) \times 10^d$$

hemos factorizado 10^d

Ejemplo 16

Haga la suma $(2.35 \times 10^4) + (4.32 \times 10^4)$

Solución:

$$\begin{aligned} & (2.35 \times 10^4) + (4.32 \times 10^4) \\ = \ & (2.35 + 4.32) \times 10^4 \\ = \ & 6.67 \times 10^4 \end{aligned}$$

cuando los exponentes no son iguales, entonces, primero se igualan y luego se opera.

Ejemplo 17

Hága la suma $\left(6.32 \times 10^4\right) + \left(3.12 \times 10^2\right)$

$$6.32 \times 10^4 + 3.12 \times 10^2 =$$
$$632 \times 10^2 + 3.12 \times 10^2 =$$
$$(632 + 3.12) \times 10^2 =$$
$$635.12 \times 10^2 = 6.3512 \times 10^4$$

Ejemplo 18

Hága la suma

$$\begin{aligned} 3.16 \times 10^7 + 6.9 \times 10^5 &= \\ 3.16 \times 10^7 + 0.069 \times 10^7 &= \\ (3.16 + 0.069) \times 10^7 &= 3.229 \times 10^7 \end{aligned}$$

Ejemplo 19

Hága la suma $\left(3.25 \times 10^{-4}\right) - \left(2.42 \times 10^{-3}\right)$

$$3.25 \times 10^{-4} - 2.42 \times 10^{-3} =$$
$$3.25 \times 10^{-4} - 24.2 \times 10^{-4} =$$
$$-20.95 \times 10^{-4} = -2.095 \times 10^{-3}$$

Ejemplo 20

Hága la suma $\left(8.23 \times 10^{-6}\right) + \left(1.27 \times 10^4\right)$

$$8.23\times10^{-6}+1.27\times10^{4}=$$
$$8.23\times10^{-6}+12,700_1000,000\times10^{-6}=$$
$$12,700,000,008.23\times10^{-6}=$$
$$1.270000000823\times10^{4}\approx1.27\times10^{4}$$

en este caso vemos que para tomar en cuenta el primer término de la suma es necesario conservar al menos 10 decimales, que no es lo usual, de tal forma que en la suma podemos despreciar ese primer término.

$$8.23\times10^{-6}+1.27\times10^{4}=1.27\times10^{4}$$

Productos y cocientes

Para realizar los productos y los cocientes se aprovecha la propiedad conmutativa de los números.

$$\left(a.bc\times10^{d}\right)\times\left(e.fg\times10^{h}\right)=$$

$$(a.bc\times e.fg)\times10^{(d+h)}$$

Ejemplo 21

Hága la multiplicación

$$\left(6.25\times10^{4}\right)\times\left(6.22\times10^{-2}\right)=$$
$$(6.25\times6.22)\times\left(10^{4}\times10^{-2}\right)=$$
$$38.875\times10^{2}=3.8875\times10^{3}$$

Ejemplo 22

Hága la multiplicación

$$\left(0.23\times10^{-3}\right)\times\left(3.68\times10^{4}\right)=$$
$$(0.23\times3.68)\times\left(10^{-3}\times10^{4}\right)=$$
$$0.8464\times10^{1}=8.464$$

Ejemplo 23

Efectue la división.

$$\left(4.15\times10^{3}\right)\div\left(9.76\times10^{2}\right)=$$
$$\tfrac{4.15\times10^{3}}{9.76\times10^{2}}=\tfrac{4.15}{9.76}\times10^{(3-2)}$$
$$=0.425\times10^{1}=4.25$$

el problema 23 al igual que los anteriores de notación en base 10 pueden ser resueltos en forma directa usando una calculadora típica[1]

[1] Un error corriente cuando se usa la notación en potencias de 10 en una calculadora es escribir por ejemplo el número 10^{5} como $\boxed{10\quad 05}$ cuando en realidad es $\boxed{1\quad 05}$ ya que $10^{5}=1\times10^{5}$ y no 10×10^{5}

$\boxed{4.15\qquad 03}$

$\boxed{\div}$

$\boxed{9.76\qquad 02}$

$\boxed{=}$

$\boxed{4.25\qquad\quad}$

Potencias y raíces

Para elevar un número en notación de potencia de 10 a una potencia se eleva por separado el coeficiente y el 10^{x} por separado y luego se escribe en la forma estándar.

Ejemplo 24

Eleve el número $\left(3.28\times10^{5}\right)$ a la potencia 4.

$$\begin{aligned}\left(3.28\times10^{5}\right)^{4}&=\\(3.28)^{4}\times\left(10^{5}\right)^{4}&=\\115.74\times\left(10^{5\times4}\right)&=\\115.74\times\left(10^{20}\right)&=\end{aligned}$$

$$1.1574\times10^{22}$$

Usando una calculadora típica

$\boxed{4}$

$\boxed{x^{y}}$

$\boxed{3.28\quad 05}$

$\boxed{=}$

$\boxed{1.1574\quad 22}$

Ejemplo 25

Eleve el número $\left(0.03\times10^{-8}\right)$ a la potencia -5

$$\begin{aligned}\left(0.03\times10^{-8}\right)^{-5}&=\\(0.03)^{-5}\times\left(10^{-8}\right)^{-5}&=\\4.1152\times10^{7}\times1.00\times10^{40}&=\end{aligned}$$

$$4.11522\times10^{47}$$

Usando una calculadora típica

$$\boxed{-5}$$
$$\boxed{x^y}$$
$$\boxed{0.03 \quad -08}$$
$$\boxed{=}$$
$$\boxed{4.11522 \quad 47}$$

y para obtener raíces debemos recordar que una raíz cuadrada es $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, una raíz cúbica es $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, una raíz cuarta es $\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$, etc.

Ejemplo 26

Obtenga la raíz cuadrada del número $\left(1.56 \times 10^7\right)$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1.56 \times 10^7} &= \\
\sqrt{1.56} \times \sqrt{10^7} &= \\
\sqrt{1.56} \times \left(10^7\right)^{\frac{1}{2}} &= \\
1.2489996 \times \sqrt{10000000} &= \\
1.2489996 \times 3162.27766 &= \\
3949.68 &=
\end{aligned}$$

$$3.94968 \times 10^3$$

Usando una calculadora típica

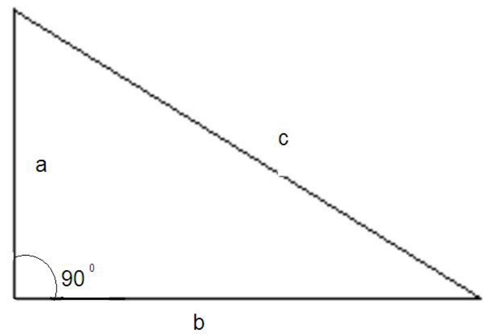
$$\boxed{1.56 \quad 03}$$
$$\boxed{\sqrt{x}}$$
$$\boxed{3.94968 \quad 03}$$

o de la forma alterna

$$\boxed{\tfrac{1}{2}}$$
$$\boxed{x^y}$$
$$\boxed{1.56 \quad 03}$$
$$\boxed{=}$$
$$\boxed{3.94968 \quad 03}$$

Ejemplo 27

Obtenga la raíz cúbica del número 6.87×10^{-4}.



$$\begin{aligned}
(6.87)^{\frac{1}{3}} \times \left(10^{-4}\right)^{\frac{1}{3}} &= \\
1.90101515 \times \left(\frac{1}{10000}\right)^{\frac{1}{3}} &= \\
1.90101515 \times 4.64158883 \times 10^{-2} &=
\end{aligned}$$

$$8.82373069 \times 10^{-2}$$

resolviendo con calculadora

$$\boxed{\tfrac{1}{3}}$$
$$\boxed{x^y}$$
$$\boxed{6.87 \quad -04}$$
$$\boxed{=}$$
$$\boxed{8.82373069 \quad -02}$$

6 Trigonometría

Nomenclatura: Los lados de un triángulo se denominan catetos e hipotenusa. De los tres ángulos de un triángulo uno de ellos es simpre recto, es decir tiene $90°$, y al lado que queda de frente a él se le denomina *hipotenusa*. Los *catetos* por lo tanto son los adyacentes al ángulo^o recto.

La **figura 1** muestra un triángulo rectangulo típico. c =hipotenusa, a y b = catetos, α y

β =ángulos no rectos y $\gamma = 90\,^\circ$ = ángulo recto. Generalmente los lados se denotan por letras latinas y los ángulos por letras griegas.

6.0.1 Teoremas y definiciones

Teorema de Pitágoras El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Teorema 1 La suma de los ángulos internos de un triángulo plano es igual a $180\,^\circ$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180\,^\circ$$

Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas son:

$$\begin{aligned}\sin\theta = \text{seno} = \tfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \tfrac{1}{\sec\theta}\\ \cos\theta = \text{coseno} = \tfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \tfrac{1}{\csc\theta}\\ \tan\theta = \text{tangente} = \tfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \tfrac{1}{\cot\theta}\end{aligned}$$

Una función relaciona un conjunto de números con otro. Así la función seno relaciona los ángulos entre $0\,^\circ$ y $90\,^\circ$ con los números entre 0 y 1,

$$[0\,^\circ, \ldots, 90\,^\circ] \overset{seno}{\to} [0, \ldots, 1]$$

he aquí algunos ejemplos

$$\begin{gathered}\sin 0^o = 0.0000\\ \sin 5^o = 0.0872\\ \sin 10^0 = 0.1736\\ \sin 15^0 = 0.2588\\ \sin 20^o = 0.3420\\ \sin 25^o = 0.4226\\ \sin 90^o = 1.0000\end{gathered}$$

Las funciones Coseno y Tangente también hacen una tarea semejante.

$$[0\,^\circ, \ldots, 90\,^\circ] \overset{\tan gente}{\to} [0, \ldots, \infty] \tan 90\,^\circ$$

Las funciones inversas correspondientes a las tres son:

Seno	Arcoseno = Seno inverso = $\sin^{-1}$
Coseno	Arcoseno = Coseno inverso = $\cos^{-1}$
Tangente	Arcotangente = Tangente inversa = $\tan^{-1}$

estas 3 nuevas funciones hacen el camino de regreso, es decir asocian un ángulo a un número permitido por su rango

$$[0, \ldots, 1] \overset{Ar\cos eno}{\to} [0\,^\circ, \ldots, 90\,^\circ]$$

$$\begin{gathered}\sin^{-1}(0.0000) = 0\,^\circ\\ \sin^{-1}(0.0872) = 5\,^\circ\\ \sin^{-1}(0.1736) = 10\,^\circ\\ \sin^{-1}(1.0000) = 90\,^\circ\end{gathered}$$

al usar una calculadora con cuatro decimales no se obtienen los valores de la tabla anterior sino

$$\begin{gathered}\sin^{-1}(0.0000) = 0\,^\circ\\ \sin^{-1}(0.0872) \simeq 5.0025\,^\circ\\ \sin^{-1}(0.1736) \simeq 9.9972\,^\circ\\ \sin^{-1}(1.0000) = 90\,^\circ\end{gathered}$$

eso se debe por supuesto a errores de aproximación porque el valor de $\sin 5\,^\circ$ tiene infinitos decimales; siendo los primeros de ellos

$$\sin 5\,^\circ = 0.08715574274765817355806427083 75\ldots$$

ahora usaremos los teoremas y las definiciones de las funciones y las funciones inversas para resolver problemas de triángulos rectángulos.

Ejemplo 28

Verifíque los teoremas de Pitágoras y Uno para el triángulo de la figura 2,

el teorema de Pitágoras es

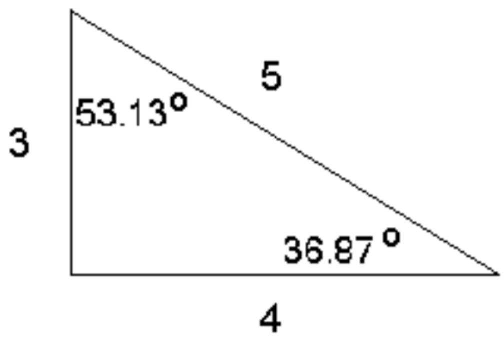
$$\begin{gathered}5^2 = 4^2 + 3^2\\ 25 = 16 + 9\end{gathered}$$

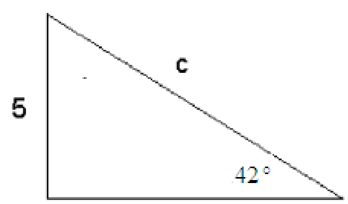
y el teorema de los ángulos internos

$$53.13\,^\circ + 36.87\,^\circ + 90\,^\circ = 180\,^\circ$$

además

$$\begin{gathered}\sin 53.13\,^\circ = \tfrac{4}{5} = 0.8000\\ \cos 53.13\,^\circ = \tfrac{3}{5} = 0.6000\\ \tan 53.13\,^\circ = \tfrac{4}{3} = 1.3333\end{gathered}$$





Resolver un triángulo significa, encontrar los valores desconocidos a partir de los conocidos, como en el siguiente

Ejemplo 29

Resolver el triángulo de la figura 3.

De la figura notamos que

$$\sin 42\,^{\circ} = \tfrac{5}{c} = 0.66913$$
$$c = \tfrac{5}{0.66913} = 7.4724$$

y hemos encontrado la hipotenusa

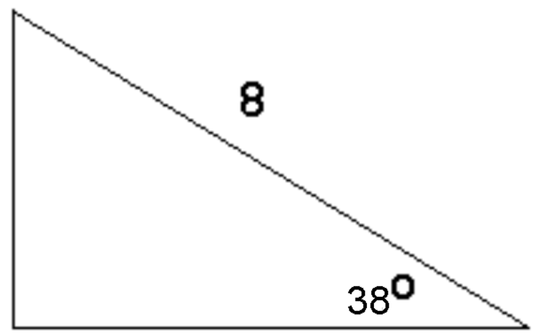
$$\cos 42\,^{\circ} = 0.74314 = \tfrac{a}{7.47}$$
$$a = 7.4724 \times 0.74314 = 5.553$$

y para finalizar encontramos el otro ángulo

$$\sin\beta = \tfrac{5.553}{7.4724} = 0.74313$$
$$\beta = \arcsin 0.74313 = 47.999^{\text{o}}$$

comprobando el teorema de los ángulos

$$90^{\text{o}} + 42^{\text{o}} + 47.999^{\text{o}} = 179.999^{\text{o}} \approx 180^{\text{o}}$$



y el teorema de Pitágoras

$$7.4724^2 = 5.553^2 + 5^2$$
$$55.837 = 30.836 + 25.0$$
$$55.837 = 55.836$$
$$55.837 \approx 55.836$$

al igual que en otras operaciones aproximadas al no tomar todos los números decimales en cuenta obtenemos un valor muy cercano al exacto.

Ejemplo 30

Resolver el triángulo de la figura 4.

de la figura 4 notamos que

$$\sin 38^{\text{o}} = 0.6156 = \tfrac{a}{8.00}$$
$$a = 8.00 \times 0.6156 = 4.9253$$

y tenemos a, luego para obtener b

$$\cos 38^{\text{o}} = 0.7880 = \tfrac{b}{8.00}$$
$$b = 8.00 \times 0.7880 = 6.3041$$

y finalmente

$$90^{\text{o}} + 38^{\text{o}} + \beta = 180^{\text{o}}$$
$$\beta = (180 - 90 - 38)^{\text{o}} = 52^{\text{o}}$$

7 Logaritmos

7.1 Logaritmos en base 10

El logaritmo de base 10 es la función inversa de 10 elevado a una potencia determinada, es decir:

$$\text{Si } \ x = 10^y \text{ entonces } y = \log x$$

esto puede ser comprobado con facilidad tomando algunos números arbitrarios. Sea $x = 10000$ y $y = 4$

$10^4 = 10000$	$\log(10000) = 4$
$10^{-3} = 0.001$	$\log(0.001) = -3$
$10^{2.3} = 199.52623$	$\log(199.52623) = 2.3$
$10^{\frac{1}{2}} = 3.16227$	$\log(3.16227) = 0.5$

notamos que:

$$\begin{aligned} \log\left[10^8\right] &= 8 \\ 10^{[\log 8]} &= 8 \end{aligned}$$

como puede verificarlo con una calculadora

$\boxed{8}$

$\boxed{10^x}$

$\boxed{1 \qquad\qquad 8}$

$\boxed{\log}$

$\boxed{8}$

y

$\boxed{8}$

$\boxed{\log}$

$\boxed{0.9030899}$

$\boxed{10^x}$

$\boxed{8}$

ahora resolveremos problemas que involucran logaritmos.

Ejemplo 31

¿Cúal es el valor de x en la ecuación $x = 25 \times \log_{10} 30$?, Solution is: $25 \log_{10} 30 = 36.928$

$$\begin{aligned} 25 \times \log 30 &= \\ 25 \times (\log 30) &= \\ 25 \times (1.47712125) &= \end{aligned}$$

$$36.9280313$$

usando la calculadora

$\boxed{30}$

$\boxed{\log}$

$\boxed{\times}$

$\boxed{25}$

$\boxed{=}$

$\boxed{36.928031}$

Ejemplo 32

¿Cúal es el valor de x en la ecuación $5.6 = \log_{10} x$?

$$\begin{aligned} 10^{5.6} &= 10^{\log_{10} x} \\ 10^{5.6} &= x \\ x &= 3.9811 \times 10^5 \end{aligned}$$

Ejemplo 33

¿Cúal es el valor de x en la ecuación $12 = 8 \times \log x$?

$$\begin{aligned} 12 &= 8 \times \log x \\ \frac{12}{8} &= \log x \\ 1.5 &= \log x \\ x &= 10^{1.5} \\ x &= 31.623 \end{aligned}$$

7.2 Logaritmos de base e

El número e es un número con infinitos decimales

$$e = 2.71828182845904523536028747135\ldots$$

aunque por lo regular no usamos solo unos cuantos.

El logaritmo de base e es la función inversa de e elevado a una potencia determinada, es decir:

$$\text{Si } \ x = e^y \text{ entonces } y = \ln x$$

esto puede ser comprobado con facilidad tomando algunos números arbitrarios. Sea $x = 54.598$ y $y = 4$

$$
\begin{array}{cc}
e^4 = 54.598 & \ln(54.598) = 4 \\
e^{-3} = 4.9787 \times 10^{-2} & \ln\left(4.9787 \times 10^{-2}\right) = -3 \\
e^{2.3} = 9.9742 & \ln(9.9742) = 2.3 \\
e^{\frac{1}{2}} = 1.6487 & \ln(1.6487) = 0.49999 \simeq \frac{1}{2}
\end{array}
$$

al igual que en los logaritmos de base 10 se verifica

$$
\begin{aligned}
\ln e^{25} &= 25 \\
e^{[\ln 25]} &= 25
\end{aligned}
$$

puede verificar para cualquier número mediante el uso de su calculadora usando $x = 25$

$\boxed{25}$

$\boxed{\ln}$

$\boxed{3.2188758}$

$\boxed{e^x}$

$\boxed{25}$

y

$\boxed{25}$

$\boxed{e^x}$

$\boxed{7.2004899 \quad 10}$

$\boxed{\ln}$

$\boxed{25}$

Ejemplo 34

¿Cúal es el valor de x en la ecuación $3e^x = 9$?

$$
\begin{aligned}
3e^x &= 9 \\
e^x &= \frac{9}{3} = 3 \\
\ln e^x &= \ln 3 \\
x &= 1.0986
\end{aligned}
$$

Ejemplo 35

¿Cúal es el valor de x en la ecuación $350 = 7 \ln x$?

$$
\begin{aligned}
\frac{350}{7} &= 50 = \ln x \\
e^{50} &= e^{\ln x} \\
x &= 5.1847 \times 10^{21}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 36

¿Cúanto vale x en la ecuación $\ln(3x-7) = 2$?

$$
\begin{aligned}
\ln(3x-7) &= 2 \\
e^{\ln(3x-7)} &= e^2 \\
(3x-7) &= 7.3891 \\
3x &= 7.3891 + 7 = 14.389 \\
x &= \frac{14.389}{3} = 4.7963
\end{aligned}
$$

8 Geometría

Figuras Planas

Las figuras planas que usaremos mas corrientemente son:

	Area	Perímetro
Cuadrado	l^2	$4l$
Círculo	πr^2	$2\pi r$
Triángulo	$\frac{1}{2}hd$	$a+b+c$
Rectángulo	fg	$2(f+g)$

dónde l es el lado del cuadrado, r es el radio del círculo, h es la altura del triángulo, d es la base del tríangulo, a, b, c son los lados del tríangulo y f, g son los lados mayor y menor del rectángulo.

Ejemplo 37

¿Cúal es el área y el perímetro correspondiente a un cuadrado de 2 cm de lado? El área es:

$$
\begin{aligned}
A &= \pi r^2 \\
&= \pi\,(2\,\mathrm{cm})^2 \\
&= 4\pi\,\mathrm{cm}^2 \\
&= 12.566\,\mathrm{cm}^2
\end{aligned}
$$

y el perímetro es:

$$
\begin{aligned}
p &= 4l \\
4\,(2\,\mathrm{cm}) &= 8\,\mathrm{cm}
\end{aligned}
$$

ahora podemos resolver algunos problemas de geometría

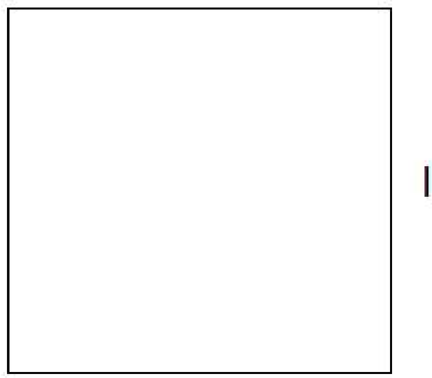


Figure 1: cuadrado

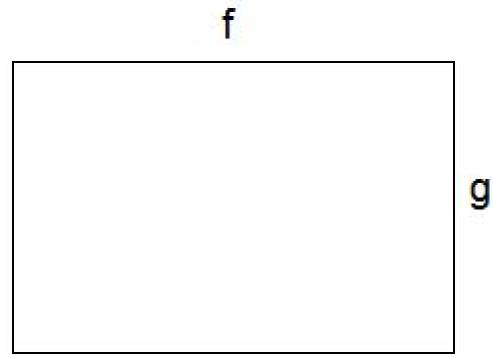


Figure 3: rectángulo

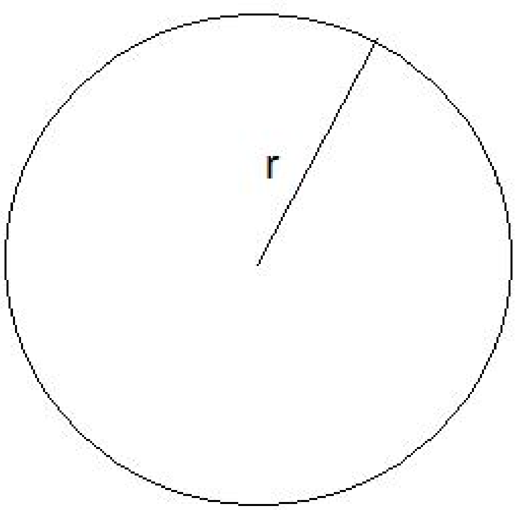


Figure 2: círculo

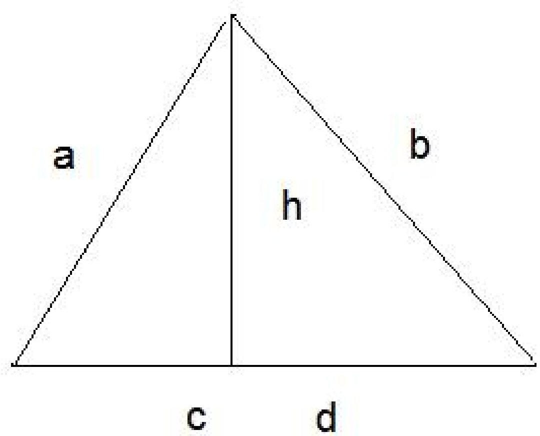


Figure 4: triángulo

Ejemplo 38

Si el radio de una circunferencia es 7 cm ¿Cuáles serán su perímetro y su área?

$$\begin{aligned} p &= 2\pi r \\ 2\pi\,(7\,\mathrm{cm}) &= 43.982\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \pi\,(7\,\mathrm{cm})^2 \\ &= 153.94\,\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 39

Si el área de un cuadrado es 25 cm ¿Cúanto vale su radio y su perímetro?

$$\begin{aligned} A &= 25\,\mathrm{cm}^2 = \pi r^2 \\ r^2 &= \frac{25\,\mathrm{cm}^2}{\pi} \\ r &= \sqrt{\frac{25\,\mathrm{cm}^2}{\pi}} \\ r &= 2.8209\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= 2\pi\,(2.8209\,\mathrm{cm}) \\ p &= 17.724\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

Ejemplo 40

¿Tiene mayor área A_2 un círculo de 3 cm de radio o un cuadrado A_1 de 3 cm de lado?

$$\begin{aligned} A_1 &= (3\,\mathrm{cm})^2 \\ A_1 &= 9\,\mathrm{cm}^2 \\ A_2 &= \pi\,(3\,\mathrm{cm})^2 \\ A_2 &= 28.274\,\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

entonces dado que $A_2 > A_1$ se concluye que tiene mayor área el círculo.

Ejemplo 41

Encuentre el área y el perímetro del triángulo del ejemplo 28

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\,(4)\,(3) \\ A &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= 3+4+5 \\ p &= 12 \end{aligned}$$

Ejemplo 42

Un cuadrado tiene un área de $60\,\mathrm{cm}^2$ ¿cuánto es la longitud de una línea trazada desde un ángulo cualquiera hasta el ángulo opuesto.

Primero encontramos la longitud del lado

$$\begin{aligned} l^2 &= 60\,\mathrm{cm}^2 \\ l &= \sqrt{60\,\mathrm{cm}^2} \\ l &= 7.7460\times 10^{-2}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

ahora notamos que al trazar la línea formamos dos triángulos iguales cuyos catetos son precisamente sus lados, entonces encontramos la hipotenusa mediante el Teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} h^2 &= (0.077460\,\mathrm{m})^2 + (0.077460\,\mathrm{m})^2 \\ h^2 &= 0.012\ \mathrm{m}^2 \\ h &= 0.10954\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Ejemplo 43

Un rectángulo tiene un lado igual a 12 cm y el otro igual a 9 cm ¿Cúanto es su perímetro y su área?

$$\begin{aligned} A &= (12\,\mathrm{cm})\times(9\,\mathrm{cm}) \\ A &= 108\,\mathrm{cm}^2 \\ p &= 2\,(12\,\mathrm{cm}+9\,\mathrm{cm}) \\ p &= 42\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

Ejemplo 44

Si el área de un rectángulo es igual $85\,\mathrm{cm}^2$ y uno de sus lados es 30% mas grande que el otro ¿Cúanto vale cada uno de sus lados y su perímetro?

$$\begin{aligned} a &= 1.0x \qquad b = 1.3x \\ ab &= 1.3x^2 = 85\,\mathrm{cm}^2 \\ x^2 &= \frac{85\,\mathrm{cm}^2}{1.3} = 65.385\,\mathrm{cm}^2 \\ x &= \sqrt{65.385\,\mathrm{cm}^2} = 8.0861\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 8.0861\,\mathrm{cm} \\ b &= 1.3(8.0861) = 10.512\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p &= 2(a+b) \\
p &= 2(8.086\,1+10.512) = \\
p &= 37.196\,\text{cm}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 45

Una circunferencia de cartón tiene un diámetro de 12.7 centímetros y en su centro tiene un agujero de 8.4 centímetros de diámetro. ¿Cúal es el área del agujero? ¿Cúal es el área de la superficie de cartón?

Primero encontramos el área del agujero

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{8.4\,\text{cm}}{2} = 4.2\,\text{cm} \\
A_1 &= \pi\,(4.2\,\text{cm})^2 \\
&= 55.418\,\text{cm}^2
\end{aligned}
$$

el área de la superficie total, sin agujero, de cartón es

$$
\begin{aligned}
r_2 &= \frac{12.7\,\text{cm}}{2} = 6.35\,\text{cm} \\
A_2 &= \pi\,(6.35\,\text{cm})^2 \\
&= 126.68\,\text{cm}^2
\end{aligned}
$$

si ahora restamos el área del agujero queda el área real

$$
\begin{aligned}
A &= 126.68\,\text{cm}^2 - 55.418\,\text{cm}^2 \\
&= 71.262\,\text{cm}^2
\end{aligned}
$$

Ejemplo 46

Un triángulo rectángulo tiene un cateto igual a 3.8 cm y el otro igual a 4.2 cm. ¿Cúal es su perímetro y cúal es su área?

Primero encontramos la hipotenusa

$$
\begin{aligned}
h^2 &= (3.8\,\text{cm})^2 + (4.2\,\text{cm})^2 \\
h^2 &= 32.08\,\text{cm}^2 \\
h &= 5.663\,9\,\text{cm}
\end{aligned}
$$

entonces el perímetro es:

$$
\begin{aligned}
p &= (3.8+4.2+5.663\,9)\ \text{cm} \\
p &= 13.664\,\text{cm}
\end{aligned}
$$

y el área

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\,(3.8\,\text{cm})\,(4.2\,\text{cm}) \\
A &= 7.98\,\text{cm}^2
\end{aligned}
$$

Ejemplo 47

Un triángulo isóceles es aquel que tiene sus tres lados iguales. Encuentre el área y el perímetro de un triángulo isóceles de 12 centímetros de lado.

$$
p = 3 \times 12\,\text{cm} = 36\,\text{cm}
$$

dado que sus lados son iguales, también lo seran sus angulos de tal forma que cada ángulo mide

$$
\alpha = \frac{180\,^\circ}{3} = 60\,^\circ
$$

partimos por la mitad la base para llegar al vértice superior y eso nos deja dos triángulos iguales y nos permite calcular la altura. Note que el cateto inferior tendrá una longitud igual a la mitad de cada lado, es decir 6 cm.

$$
\begin{aligned}
\tan 60\,^\circ &= \frac{h}{6\,\text{cm}} \\
h &= 10.392\,\text{cm}
\end{aligned}
$$

entonces

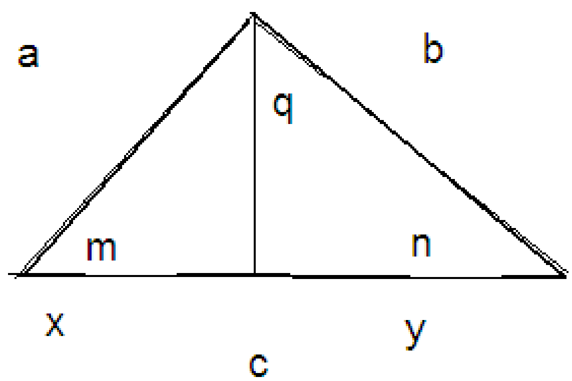
$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2}\,(12\,\text{cm}) \times (10.392\,\text{cm}) \\
&= 62.352\,\text{cm}^2
\end{aligned}
$$

Ejemplo 48

Un triángulo tiene una altura de 6 cm y una base de 10 cm y uno de los ángulos de la base es $m = 60\,^\circ$¿Cuánto vale su área y su perímetro?¿Cúanto valen sus otros dos ángulos n y q?

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\,(6\,\text{cm})\,(10\,\text{cm}) \\
A &= 30\,\text{cm}^2
\end{aligned}
$$

la base representa uno de los lados, para poder encontrar los otros dos lados debemos usar trigonometría, primero encontramos a



ahora encontraremos los ángulos

$$\begin{aligned} \tan n &= \frac{6}{6.5359} \\ \tan n &= 0.91801 \\ n &= 42.552^\circ \\ m+n+q &= 180^\circ \\ 60^\circ + 42.552^\circ + q &= 180^\circ \\ q &= 77.448^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan 60^\circ &= \frac{6}{x} \\ x &= 3.4641 \\ y &= c - x \\ y &= 10 - 3.4641 \\ y &= 6.5359 \\ \sin 60^\circ &= \frac{6}{a} \\ a &= 6.9282 \end{aligned}$$

luego encontramos b

$$\begin{aligned} 6^2 + (6.5359)^2 &= b^2 \\ 78.718 &= b^2 \\ b &= 8.8723 \end{aligned}$$

entonces el perímetro es

$$\begin{aligned} p &= a+b+c \\ p &= 6.9282 + 8.8723 + 10 \\ p &= 25.801\,\text{cm} \end{aligned}$$