Media y Calculo de Errores

Ing. Walter Giovanni Álvarez Marroquín.
Coordinación de laboratorios de física,
Facultad de Ingeniería, USAC.

Medida:

- Medir es determinar el valor de una magnitud física comparándola con un patrón que se denomina ***unidad de medida.***

- Desafortunadamente, no es posible realizar una medida que este libre de errores. Estos errores pueden deberse a múltiples causas.

- El orden de magnitud del error total de la medida es su ***precisión.***

- Cuando damos el valor de una magnitud física, es conveniente saber cuan fiable es ese valor; esta fiabilidad nos la mide la precisión, y para conocerla hay que estimar el error.

Tipos de errores.

Error de Precisión:

- Todo equipo de medida tiene al menos una escala. La división mas pequeña de la escala determina la mínima diferencia de magnitud que puede apreciar el equipo, es decir: *su resolución*.

Por ejemplo,

una regla convencional esta dividida en centímetros y milímetros. Por lo tanto, cualquier medida que realicemos con dicha regla solo nos permite conocer la longitud de un 0bjeto con un error aproximado de 1 mm. Solo podemos disminuir este error si utilizamos un aparato de medida con mayor resolución.

- A este tipo de error se le denomina *error de precisión.*

Tipos de errores.

Errores sistemáticos:

- Su origen suele deberse a un mal funcionamiento o calibración del equipo de medida. Normalmente su efecto es incrementar o disminuir el valor de la medida siempre en la misma cantidad. Una vez determinado su origen es posible eliminarlo totalmente de la medida.

- La única manera segura de tratar estos errores es asegurarse del correcto funcionamiento de los equipos de medida.

Tipos de errores.

Errores accidentales:

- son los resultantes de la contribución de numerosas fuentes incontrolables que desplazan de forma aleatoria el valor medio por encima y por debajo de su valor real.

- También suelen denominarse *errores aleatorios o estadísticos.*

- Los errores accidentales, al contrario de los errores sistemáticos, son inevitables y están presentes en todo experimento.

Modo de expresar los resultados

- Una vez que hemos medido una cierta magnitud *x* y que sabemos que su error es Δ*x*, debemos expresar el resultado como:

$$x = (x_o \pm \Delta x) \quad [unidades]$$

donde la medida y el error sedan en las **mismas** unidades.

$$altura = (1.76 \pm 0.02)\ \ m$$

Medidas directas.

- Una medida directa es la que se obtiene de un aparato de medida.

Error cometido al realizar *una sola* **medida de una magnitud.**

- **Analógico:** el error de precisión es la mitad de la división mas pequeña magnitud que puede medir el aparato.

$$\varepsilon_{\mathrm{p}} = \text{división más pequeña} \times \frac{1}{2}$$

- **Digital:** el error de precisión es la mínima magnitud que puede medir el aparato.

$$\varepsilon_{\mathrm{p}} = \text{mínima magnitud medible}$$

Medidas directas.

Error cometido al realizar *n* medidas de una magnitud.

- La mejor aproximación al verdadero valor de x:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

- El error cometido al aproximar el valor verdadero de x a $\bar{x}$ es el llamado error accidental:

$$\varepsilon_{acc}(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

- Para estimar el error final de nuestras medidas usaremos el máximo entre el error de precisión y el error accidental calculado:

$$\Delta x = \max(\varepsilon_p, \varepsilon_{acc})$$

Cifras significativas: Redondeo

- Se establece que el valor de una medida no puede tener mas precisión que la que tiene su error.

- El procedimiento consiste en redondear en primer lugar el valor del error para que solo tenga una cifra distinta de cero y por tanto determinar el orden de magnitud de la cifra mas significativa.

- Y en segundo lugar redondear el valor de la medida

Cifras significativas: Redondeo

Criterios para redondear.

1. El valor de la medida y del error deben expresarse en las mismas unidades.
2. *En el error solo debe emplearse una cifra distinta de cero*, haremos una excepción cuando la cifra mas significativa distinta de cero es el 1 y la segunda cifra es menor o igual que 5, en cuyo caso debe mantenerse la cifra que sigue al 1 para expresar el error.
3. *Si la primera cifra que se suprime es mayor que 5*, la ultima cifra conservada debe aumentarse en 1 unidad. Por ejemplo, 0.861342 s debemos escribir 0.9.
4. *Si la primera cifra que se suprime es menor que 5*, la ultima cifra conservada no varia. Por ejemplo 234.38 m redondeado en la cifra mas significativa será 200 m

Cifras significativas: Redondeo

Criterios para redondear.

5. ***Si la primera cifra que se suprime es igual a 5, pueden darse dos casos:***

   a) entre las siguientes cifras suprimidas, hay otras distintas de cero: en este caso, la ultima cifra aumenta en 1. Por ejemplo, 35.234 s se redondea a 40 s.

   b) todas las cifras suprimidas, salvo el 5, son cero: en este caso, la ultima cifra conservada no varia. Por ejemplo, 35.0000 N se redondea a 30 N.

Cifras significativas: Redondeo

Criterios para redondear.

6. ***El valor de la medida debe tener la misma precisión que el error.*** Al contrario que el error, el resultado si puede tener mas de una cifra distinta de cero. Para redondear la medida es necesario haber redondeado antes el error.

   Por ejemplo,

   Si el error es 0.7 kg y el valor d la medida es 25.784535, el resultado final se expresa como: (25.8 ± 0.7) kg.

   Si el error fuera de 7 kg, el resultado seria (26 ± 7) kg.

Cifras significativas: Redondeo

Criterios para redondear. Ejemplo:

Error (m)	Error redondeado (m)	Medida (m)	Resultado final (m)
0.018	0.02	0.987	0.99 ± 0.02
0.068	0.07	25.8251	25.83 ± 0.07
0.072	0.07	25.825	25.82 ± 0.07
0.66	0.7	0.88	0.9 ± 0.7
0.52	0.5	12	12.0 ± 0.5
0.942	0.9	1.867	1.9 ± 0.9
0.987	1	26.97	27 ± 1
11.897	12	356.257	356 ± 12
26	30	364	360 ± 30
340	300	588.6	600 ± 300
370.86	400	25.82	0 ± 400

Error absoluto y error relativo:

Análisis del error

- Para determinar si el error de la medida es grande o no en comparación con esta, recurrimos al denominado ***error relativo***

$$\varepsilon_{rel} = \frac{\Delta x}{x}$$

$$\varepsilon_{rel}(\%) = \frac{\Delta x}{x} \times 100$$

si lo expresamos en %.

Error absoluto y error relativo:
Análisis del error

Ejemplo:

Supongamos que hemos medido la distancia de la Tierra al Sol y de Marte al Sol, y que los resultados obtenidos son:

$$R_{TS} = (1.5 \pm 0.4) \times 10^{8}\, km$$

$$R_{MS} = (22.8 \pm 0.4) \times 10^{8}\, km$$

en ambos casos, el error absoluto es el mismo, sin embargo, el error cometido es mucho mas importante en el primer caso que en el segundo, como se pone de manifiesto al calcular el error relativo:

$$\varepsilon_r (R_{TS}) = 27\%$$

$$\varepsilon_r (R_{MS}) = 2\%$$

La desviación estándar como la incertidumbre en una sola medición

Si se mide la misma cantidad x muchas veces, siempre con el mismo método, y si todo el origen de incertidumbre son aleatorios y pequeños, entonces sus resultados serán distribuidos alrededor de $x_{verdadero}$ de acuerdo con la distribución normal.

En particular, aproximadamente el 68% de las mediciones se sitúan en el rango de

$$x_{verdadero} \pm \Delta\sigma_x$$

entonces,

$$\Delta x = \sigma_x$$

Con esta opción, se puede estar seguro de que el 68% de la medición se encuentra dentro de Δx

La desviación estándar como la incertidumbre en una sola medición

Ejemplo:

Se tomaron 10 mediciones de la constante de fuerza de un resorte en N/m:

86, 85, 84, 89, 85, 89, 87, 85, 82, 85.

$$\bar{k} = 85.7\ N/m$$

$$\sigma_x = 2.16 \approx 2\ N/m$$

$$k = (86 \pm 2)\ N/m$$

La desviación estándar de la media (SDOM)

El error o incertidumbre en la respuesta final $x_{best} = \bar{x}$ es dada por la desviación estándar σ_x dividido por $\sqrt{N}$ esta cantidad es llamada SDOM.

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

entonces

$$x = x_{best} \pm \Delta x,$$

donde

$$x_{best} = \bar{x}$$

y

$$\Delta x = \sigma_{\bar{x}}$$

La desviación estándar de la media (SDOM)

Ejemplo:

Se tomaron 10 mediciones de la constante de fuerza de un resorte en N/m:

86, 85, 84, 89, 85, 89, 87, 85, 82, 85.

$\bar{k} = 85.7\ N/m,\ \sigma_x = 2.16\ N/m,\ \ \sigma_{\bar{x}} = 0.7\ N/m$

entonces,

$$k = (85.7 \pm 0.7)\ N/m$$

Errores sistemáticos.

A la SDOM $(\Delta\sigma_{\bar{x}})$ puede ser considerado como la componente aleatoria Δx_{ran} de la incertidumbre Δx pero no la incertidumbre total.

El problema fundamental es como calcular la componente sistemática Δx_{sys} y como combinar Δx_{ran} y Δx_{sys} para completar la incertidumbre final Δx.

Se acostumbra establecer ciertas reglas en ausencia de información mas especifica, por ejemplo todos los cronómetros hasta un 0.5% de incertidumbre sistemática, todas las balanzas hasta 1%, todos los voltímetros y amperímetros hasta 3%, y así sucesivamente.

Errores sistemáticos.

Conociendo estas reglas, hay varias maneras de proceder. Por ejemplo,

en el caso de la constante de fuerza del resorte *k,*

$$k = 4\pi^2 m/T^2,$$

con

$$\Delta k_{ran} = \sigma_{\bar{x}} = 0.06\ N/m$$

$$k_{best} = 13.16\ N/m$$

supongamos que m y T tiene incertidumbres sistemáticos hasta 1% y 0.5% respectivamente, entonces,

$$\frac{\Delta k_{sys}}{k} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m_{sys}}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T_{sys}}{T}\right)^2} = \sqrt{(1\%)^2 + (2 * 0.5\%)^2} = 1.4\%$$

Errores sistemáticos.

Ejemplo continuación…

Y por lo tanto

$$\Delta k_{sys} = k_{best} \times (1.4\%) = (13.16\ N/m) \times 0.014 = 0.18 N/m$$

Entonces,

$$k = k_{best}\ \pm\ \Delta k_{ran}\ \pm\ \Delta k_{sys}$$
$$k = (13.16 \pm 0.06 \pm 0.18) N/m$$

Ahora $\Delta k_{ran}\ y\ \Delta k_{sys}$ se podrían combinar en cuadratura, en tal caso solo tendríamos una sola incertidumbre total Δk.

$$\Delta k = \sqrt{(\Delta k_{ran})^2 + \left(\Delta k_{sys}\right)^2}$$

En nuestro caso del resorte,

$$\Delta k = \sqrt{(0.06)^2 + (0.18)^2} = 0.19\ N/m$$

Entonces el valor final de k

$$k = k_{best} \pm \Delta k$$

$$k = (13.16 \pm 0.19)\ N/m$$