

Rotación de un cuerpo rígido

Prueba experimental
Olimpiada Centroamericana de Física

Resumen—Se analizó el movimiento de rotación y traslación de una esfera de acero sobre un plano inclinado con la finalidad de demostrar su movimiento uniformemente variado, a través de gráficos y modelos propuestos de la posición y rapidez angular. Con los resultados obtenidos se estimó el momento de inercia de una esfera de acero.

I. OBJETIVOS

I-A. Generales

- Analizar el movimiento de rotación y traslación de una esfera de acero sobre un plano inclinado.

I-B. Específicos

- Demostrar que el movimiento de la esfera ocurre con una aceleración angular constante.
- Determinar el momento de inercia de la esfera de forma experimental y analítica.
- Determinar un modelo del movimiento de la esfera (posición y velocidad en función del tiempo).

II. MARCO TEÓRICO

Un objeto rígido no es deformable; es decir, las ubicaciones relativas de todas las partículas de que está compuesto permanecen constantes. Todos los objetos reales son deformables en cierta medida; no obstante, el modelo de cuerpo rígido es útil en muchas situaciones en que la deformación es despreciable.

La característica principal del movimiento circular uniformemente variado, es que la aceleración angular permanece constante; es decir:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \alpha = \text{cte.} \quad (1)$$

De la expresión anterior se puede deducir las funciones que describen la rapidez angular(ω) y la posición angular(θ) del cuerpo, obteniendo:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \quad (2)$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (3)$$

Todo movimiento circular uniformemente variado debe obedecer las ecuaciones anteriores; con la condición de que el tiempo sea mayor que cero ($t > 0$). Dado que la función $\theta(t)$ es cuadrática respecto al tiempo, se puede demostrar que la rapidez angular instantánea en el tiempo t_n es igual a la rapidez angular media ω_n en el intervalo de tiempo (t_{n-1} a t_{n+1}):

$$\omega_n = \frac{\theta_{n+1} - \theta_{n-1}}{t_{n+1} - t_{n-1}} \quad (4)$$

Es importante reconocer la analogía entre la energía cinética $(1/2)mv^2$ asociada con el movimiento traslacional y la energía cinética rotacional $(1/2)I\omega^2$.

Las cantidades I y ω en el movimiento rotacional son análogas a m y v en el movimiento traslacional, respectivamente. El momento de inercia es una medida de la tendencia de un cuerpo a resistir cambios en su movimiento rotacional, tal como la masa es una medida de la tendencia de un cuerpo a resistir cambios en su movimiento traslacional.

En la figura 1, muestra una esfera de acero que rueda sin

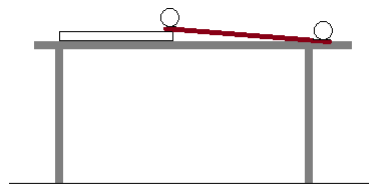


Figura 1. Diagrama del diseño experimental

deslizamiento por un plano inclinado, usando métodos de energía, la esfera de acero y tierra se modelan como un sistema aislado sin fuerzas no conservativas en acción, la rapidez del centro de masa de la esfera de acero en la parte mas baja del plano esta dada por:

$$v_{CM} = \left(\frac{2gh}{1 + (I_{CM}/MR^2)} \right)^{1/2} \quad (5)$$

el momento de inercia de la esfera de acero, despejando I_{CM} de la ecuación 5 esta dada por:

$$I_{CM} = \left(\frac{2gh}{v_{CM}^2} - 1 \right) MR^2 \quad (6)$$

El momento de inercia de una esfera sólida de masa M y radio R , usando la definición:

$$I_{CM} = \int r^2 dm \quad (7)$$

es

$$I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2 \quad (8)$$

III. DISEÑO EXPERIMENTAL

III-A. Materiales

- Una esfera de acero.
- Dos reglas métricas de (1.000 ± 0.001) m.
- Una cinta de papel de 2 metros de largo y un pedazo de cinta adhesiva.
- Un trozo de papel manila y papel carbón.
- Un vernier.
- Un cronometro digital.
- Dos varillas de aluminio.
- Un tablero de madera.
- Una balanza.

III-B. Magnitudes físicas a medir

- El diámetro de la esfera.
- La masa de la esfera.
- El tiempo que realiza la esfera para dar n vueltas utilizando el cronometro digital.
- La altura del piso al borde de la mesa.
- La distancia que cae en el piso desde el borde de la mesa.

III-C. Procedimiento

1. Colocar el tablero horizontalmente sobre la mesa de trabajo verificando que la esfera se encuentre en reposo en cualquier posición sobre el tablero.
2. Armar el sistema como lo muestra el diagrama del diseño experimental (figura 1).
3. Comprobar que la esfera tenga una trayectoria rectilínea sobre el tablero.
4. Seleccionar un sistema de referencia, para medir la posición de cada vuelta de la esfera, en una cinta de papel.
5. Partiendo del reposo, soltar la esfera desde la posición donde inicia cada vuelta.
6. Tomar el tiempo que le lleva a la esfera dar una, dos, tres, cuatro, cinco y seis vueltas.
7. Medir el diámetro y masa de la esfera.

IV. RESULTADOS

Cuadro I
POSICIÓN ANGULAR θ VRS TIEMPO PROMEDIO ($\bar{t}$)

Corrida	No. vuelta (rad)	$\bar{t}$ (s)	δt (s)
0	0	0	0
1	2π	1.345	0.006
2	4π	1.930	0.016
3	6π	2.385	0.017
4	8π	2.748	0.022
5	10π	3.095	0.013
6	12π	3.375	0.006

Propuesta de modelo para la posición angular de la esfera en función del tiempo:

$$\theta(t) = (3.31 \pm 0.17)t^2 + (-0.29 \pm 0.82)t + (0.67 \pm 0.91) \quad (9)$$

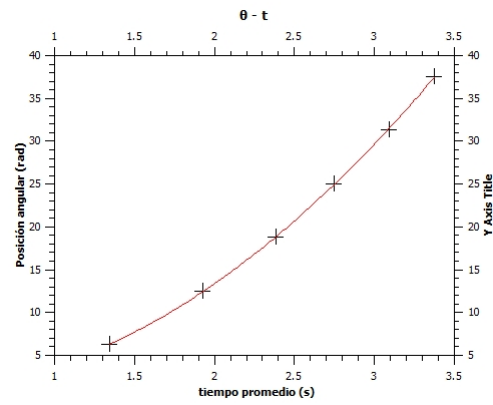


Figura 2. Gráfico de la posición angular vrs tiempo del disco

Cuadro II
RAPIDEZ ANGULAR MEDIA (ω_n) VRS TIEMPO MEDIO (t_n)

ω (rad/s)	t_n (s)
12.1	1.2
15.4	1.4
17.7	1.5
20.0	1.5

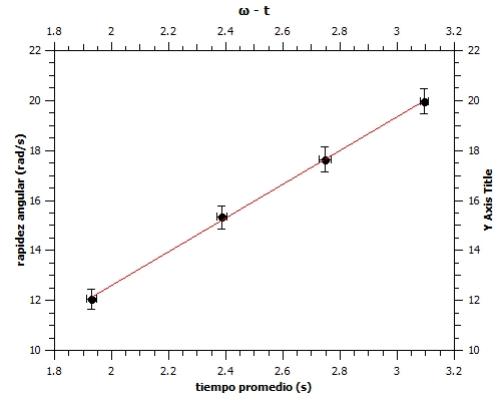


Figura 3. Gráfico de la rapidez angular media vrs tiempo del disco

Propuesta de modelo para la rapidez angular de la esfera en función del tiempo:

$$\omega(t) = (6.77 \pm 0.12)t + (-0.95 \pm 0.32) \quad (10)$$

Evaluando la rapidez angular a partir de la ecuación 10:

$$\omega(3.375 \pm 0.006) = (21.90 \pm 0.53) \text{ rad/s} \quad (11)$$

con $R = (0.01900 \pm 0.00005)m$ y $v_{cm} = R\omega$:

$$v_{cm} = (0.42 \pm 0.01)m/s \quad (12)$$

sustituyendo estos valores y con $h = (0.0125 \pm 0.0001)m$ en la ecuación 6:

$$I_{cm} = (3.14 \pm 0.54) \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot m^2 \quad (13)$$

Cuadro III
COMPARACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA DE LA ESFERA

Momento de inercia	Medición ($kg - m^2$)
analítica	$(3.230 \pm 0.017) \times 10^{-5}$
experimental	$(3.14 \pm 0.54) \times 10^{-5}$

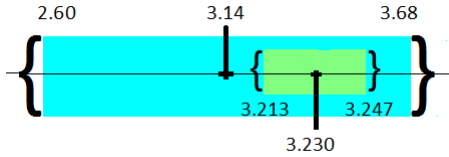


Figura 4. Comparación del momento de inercia de la esfera

Evaluando la masa de la esfera de acero $(0.2237 \pm 0.0001)kg$ y el radio de la esfera $(0.01900 \pm 0.00005)m$ a partir de la ecuación 8:

$$I_{cm} = (3.230 \pm 0.017) \times 10^{-5} kg - m^2 \quad (14)$$

V. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La línea roja de la figura 2 y 3 muestran la tendencia de los modelos propuestos para la posición y rapidez angular, de ambos modelos se puede obtener la aceleración angular del sistema siendo para el modelo de la posición $\alpha_1 = (6.62 \pm 0.34)rad/s^2$ y para el modelo de la rapidez $\alpha_2 = (6.76 \pm 0.12)rad/s^2$.

La comparación del momento de inercia de la esfera en el laboratorio con el obtenido se muestra en la tabla III y en la figura 4.

Como se puede observar en la figura 4 el modelo final del momento de inercia de una esfera, se encuentra dentro de los parámetros aceptables, por lo que se procede a validar la práctica.

VI. CONCLUSIONES

1. La esfera de acero tuvo una aceleración angular constante.
2. El calculo del momento de inercia de la esfera obtenido entra en su rango de incerteza con el medido en el laboratorio.
3. Se propone como modelo la ecuación 10 para la rapidez angular del disco.
4. El momento de inercia de la esfera de acero calculado experimentalmente $(3.14 \pm 0.54) \times 10^{-5} kg - m^2$.
5. El momento de inercia de la esfera de acero calculado analíticamente $(3.230 \pm 0.017) \times 10^{-5} kg - m^2$.