



Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ciencias

MECANISMOS PARA GENERAR MASAS EN FÍSICA DE PARTÍCULAS

Mesala Efraín Palencia Ramírez

Asesorado por: Dr. Miguel Angel Pérez Angón

Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón

Guatemala, abril de 2007

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

**MECANISMOS PARA GENERAR MASAS EN FÍSICA
DE PARTÍCULAS**

TRABAJO DE GRADUACIÓN

PRESENTADO A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA
FACULTAD DE INGENIERÍA

POR

MESALA EFRAÍN PALENCIA RAMÍREZ

ASESORADO POR: Dr. MIGUEL ANGEL PÉREZ ANGÓN

ING. JOSÉ RODOLFO SAMAYOA DARDÓN

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

GUATEMALA, ABRIL DE 2007

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA



NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paíz Recinos
VOCAL I	Inga. Glenda Patricia García Soria
VOCAL II	Inga. Alba Maritza Guerrero de López
VOCAL III	Ing. Miguel Ángel Dávila Calderón
VOCAL IV	Br. Kenneth Issur Estrada Ruiz
VOCAL V	Br. Elisa Yazminda Vides Leiva
SECRETARIA	Inga. Marcia Ivonne Véliz Vargas

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paíz Recinos
EXAMINADORA	Ms.C. Ricardo Enrique Contreras Folgar
EXAMINADORA	Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón
EXAMINADOR	Lic. Jorge De la Torre Paniagua
SECRETARIA	Inga. Marcia Ivonne Véliz Vargas

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

Cumpliendo con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

MECANISMOS PARA GENERAR MASAS EN FÍSICA DE PARTÍCULAS,

tema que me fuera asignado por la Coordinación de la Licenciatura en Física Aplicada, el 22 de septiembre de 2005.


Mesala Efran Palencia Ramirez



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N.

México, D.F. 2 de Enero del 2006

Ing. Alberto Boy
Director de Escuela de Ciencias
Facultad de Ingeniería
USAC

Estimado Ing. Boy:

Por este conducto me permito informarle que el estudiante de Licenciatura en Física Aplicada, Mesala Efraín Palencia Ramírez, fue asesorado por mi persona, en la tesis titulada, Mecanismos para Generar Masas en Física de Partículas.

Habiendo cumplido con los objetivos y metas propuestas para este trabajo, he procedido a la aprobación del mismo. Por lo que el contenido, conclusiones y recomendaciones de este trabajo es responsabilidad, tanto del autor como de su asesor

Sin otro particular, quedo de usted.

Atentamente

Dr. Miguel Ángel Pérez Angón
Departamento de Física

Guatemala, 16 de febrero de 2007

Lic. Edgar Anibal Cifuentes Anleu
Coordinador Licenciatura en Física Aplicada
Dpto. de Física, Facultad de Ingeniería
USAC

Licenciado Cifuentes:

Por este medio me permito informarle que el estudiante de la licenciatura en Física Aplicada, Mesala Efraín Palencia Ramírez, fue asesorado por mi persona, en su trabajo de graduación "MECANISMOS PARA GENERAR MASAS EN FÍSICA DE PARTÍCULAS"

Habiendo cumplido con los objetivos y metas propuestas para este trabajo, he procedido a la aprobación del mismo. Por lo que el contenido, conclusiones y recomendaciones de este trabajo es responsabilidad, tanto del autor como de su asesor.

Atentamente,


Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón



Ref.Depto.fis.039-2007
Guatemala, 12 de marzo del 2007

Ing. José Alberto Boy Piedrasanta
DIRECTOR, ESCUELA DE CIENCIAS
FACULTAD DE INGENIERIA
USAC, Ciudad


Estimado Ingeniero Boy:

Me dirijo a usted para informarle que he realizado la revisión al trabajo de tesis "MECANISMOS PARA GENERAR MASAS EN FISICA DE PARTICULAS", presentada por el estudiante **Mesala Efraín Palencia Ramírez**; con carné No. 199980006; y considerando que cumple con los objetivos de la carrera de Licenciatura en Física Aplicada, le doy mi aprobación.

Muy Atentamente,



"ID Y ENSEÑAD A TODOS"


Lic. Edgar Anibal Cifuentes Anléu
Coordinador, Lic. En Física Aplicada
Departamento de Física
Facultad de Ingeniería

c-c- archivo

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE CIENCIAS

El Director de la Escuela de Ciencias de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, después de conocer el dictamen del asesor, con el visto bueno del Coordinador de la Carrera de Licenciatura en Física Aplicada al trabajo de graduación del estudiante **MESALA EFRAÍN PALENCIA RAMÍREZ**, titulado "MECANISMOS PARA GENERAR MASAS EN FÍSICA DE PARTÍCULAS", procede a la autorización del mismo.

Ing. José Alberto Boy Piedrasanta
Director Escuela de Ciencias



Guatemala, 16 de marzo de 2007

JABPKS



El Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Director de la Escuela de Ciencias al trabajo de graduación titulado: **MECANISMOS PARA GENERAR MASAS EN FÍSICA DE PARTÍCULAS**, presentado por el estudiante universitario **Mesala Efraín Palencia Ramírez**, procede a la autorización para la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.


Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
DECANO



Guatemala, abril de 2007

AGRADECIMIENTOS A:

- Mi madre y hermana Telma Gladys Ramírez Guzmán y Mayensi Palencia
por su gran amor, por el apoyo que me han brindado
durante toda su vida, por ser mi fuerza cuando
estaba débil, por darme fé, pues creen en todo lo
que soy, por todo esto y por muchas cosas más les
estoy eternamente agradecido.
- Mi padre Efraín Antonio Palencia, por confiar en mí, y por
enseñarme a dar lo mejor de mí todos los días, no
para agradar a los hombres sino a Dios.
- Dr. Miguel Ángel Pérez Angón Por la asesoría brindada para realizar esta tesis de
licenciatura, sus enseñanzas, así como sus
innumerables críticas, comentarios y sugerencias,
fueron indispensables para llevar a cabo esta
empresa a feliz término.
- Mis Amigos Francisco de la Rosa, Salvador Lou Vega y William
Gutierrez, mis grandes amigos, casi hermanos,
quienes siempre me ayudaron a avanzar en la
carrera, por sus grandes consejos, por acompañarme
y ayudarme de una manera incondicional en los
momentos más difíciles de mi vida aquí en
Guatemala.
- Gabriela Por ser mi voluntad y fuente de inspiración desde
que te vi.

Las familias	Ramírez Guzmán, Pellecer Ramírez, Carias Ramírez, López Orozco, Reyes Escobar, y Yani Quiyuch, por darme pan cuando no tenía que comer y vivienda cuando no tenía donde dormir.
Edyn Manuel Galván Yanes	Mi gran amigo, quien siempre me ha brindado su mano en los momentos más difíciles y en los momentos gratos.
Dr. Fernando Quevedo	Por todo el gran apoyo que me ha brindado desde su estadía en Inglaterra.
Ing. Rodolfo Samayoa Ing César Izquierdo	Por ser más que catedráticos, unos grandes amigos, que siempre me ofrecieron toda su ayuda, por compartir sus conocimientos y por mostrarme el lado apasionado de la Física.
A mis amigos	De Bodega y biblioteca del Departamento de Física, amigos de la Licenciatura en Física Aplicada, y de la Licenciatura en Matemática Aplicada, por ayudarme a terminar éste trabajo de graduación y por ofrecerme toda su amistad.
A mis amigos	En especial a: Pedro Obregón Leche, Walter Reyes, Alejandro Vettorazzi, Nelson Santos y Mónica Mazariegos por haber hecho, que mi estancia en Guatemala sea muy agradable.

Quiero agradecer a mi asesor, Dr. Miguel Ángel Pérez Angón, del Departamento de Física del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, CINVESTAV, de la ciudad de México D.F. por su confianza en mí, por el tiempo, sus enseñanzas y esfuerzo dedicado a esta investigación.

Asimismo, hago extensivo el agradecimiento a todas las personas del Departamento de Física del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN en particular al Dr. Omar Miranda Romagnoli, por toda la amistad y amabilidad que ofrecieron; además agradezco todo el apoyo económico proporcionado durante los tres meses de trabajo y la ayuda para conseguir esta beca.

Tres pasiones, simples, pero abrumadamente intensas, han gobernado mi vida: el ansia de amar, la búsqueda del conocimiento y una insoportable piedad por el sufrimiento de la humanidad. Estas tres pasiones, como grandes vendavales, me han llevado de acá para allá, por una ruta cambiante, sobre un profundo océano de angustia, hasta el borde mismo de la desesperación.

He buscado el amor, primero, porque origina en mi un éxtasis, que hace estremecer todo mi cuerpo y que me hace hacer todo por amor, un éxtasis tan grande, que ha menudo hubiera sacrificado el resto de mi existencia por unas horas de este gozo. Lo he buscado, en segundo lugar, porque alivia la soledad, esa terrible soledad que a veces se apoderaba de mí. Lo he buscado, finalmente, porque en la unión del amor he visto, en una miniatura mística, la visión anticipada del cielo que han imaginado santos y poetas. Esto era lo que buscada, y, aunque pudiera parecer demasiado bueno para esta vida humana, esto es lo que-al fin-he hallado.

Con menos pasión he buscado el conocimiento. He deseado entender el corazón de los hombres. He deseado saber por qué brillan las estrellas. Y he tratado de comprender las virtuosas y apasionantes fuerzas de la naturaleza. Algo de esto he logrado, casi nada, aun tengo mucho que aprender y hacer.

El amor y el conocimiento, en la medida en que ambos eran posibles, me transportaban hacia el cielo. Pero siempre la piedad me hace volver a la tierra. Resuena en mi corazón el eco de gritos de dolor. Niños hambrientos, víctimas torturadas por opresores, ancianos desvalidos, carga odiosa para sus hijos, y todo un mundo de soledad, pobreza y dolor convierten en una burla lo que debería ser la existencia humana. Deseo ardientemente aliviar el mal, pero no puedo, y yo también sufro.

Esto ha sido mi vida. La he hallado digna de vivirse, y con gusto volvería a vivirla si se me ofreciese la oportunidad

Mesala Palencia

No tenía el deseo ni la necesidad de ganarme la vida de aquella manera, aunque tengo que confesar con vergüenza que, ocasionalmente, me burlaba de mi pobre y buen padre y le decía que, si no era bueno conmigo, me vengaría y me haría físico. "La cuarta verdad", Iain Pears

ÍNDICE GENERAL

LISTA DE SÍMBOLOS	III
GLOSARIO	V
RESUMEN	VII
OBJETIVOS	IX
INTRODUCCIÓN	XI
1. MODELO ESTÁNDAR	1
1.1. Cromodinámica Cuántica	2
1.2. Interacciones Electrodébiles	3
2. MODELOS CON DOS DOBLETES DE HIGGS	11
2.1. El potencial de Higgs	12
2.2. Restricciones Unitarias	16
2.3. El Lagrangiano Yukawa	19
3. MODELOS DE NORMA MÍNIMOS CON SIMETRÍA IZQUIERDA-DERECHA	23
3.1. Modelos mínimo con simetria izquierda-derecha	24
CONCLUSIONES	29
RECOMENDACIONES	31
BIBLIOGRAFÍA	33
APÉNDICE	35
A.1. Condición mínima para el potencial	35
A.2. El potencial con C - invarianza	38
A.3. El potencial con una invarianza Z_2	41

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathcal{L}	Función lagrangiana
D_μ	Derivada covariante
γ^μ	Matrices de Dirac
e_s	Acoplamiento de norma
$F^{A\mu\nu}$	Tensor Covariante de tercer orden
g_μ^A	Campos de gluón
t^A	Generadores de grupo $SU(3)$
α_s	Acoplamiento efectivo
\mathcal{L}_{symm}	Lagrangiano Yang-Mills
\mathcal{L}_{Higgs}	Lagrangiano de Higgs
α	Constante de estructura fina
Q	Generador de carga
G_F	Constante de acoplamiento de Fermi

GLOSARIO

Boson de Higgs	Partícula hipotética cuya existencia es predicha por el Modelo Estándar.
Campo de Higgs	Campo o campos de energía situados en lo que sería el vacío perfecto.
Cuanto	Magnitud física que es continua a nivel macroscópico, pero que se presenta discreta en el nivel microscópico de la naturaleza.
Electrodébil	Teoría que explica dentro de un mismo marco conceptual el electromagnetismo y la fuerza nuclear débil
Gluón	Partícula subatómica Hipotética responsable de la interacción entre quarks .
Quark	Una de las seis partículas que, según se cree, son los constituyentes básicos de las partículas elementales llamadas hadrones, como el protón, el neutrón o el pión.
Teoría de norma	Conjunto de las teorías cuánticas de los campos relativistas que tienen la propiedad de ser invariantes respecto a un determinado grupo de transformaciones del espacio y del tiempo.

RESUMEN

El modelo Estándar de las interacciones electrodébiles introduce un mecanismo de generación de masas, conocido como mecanismo de Higgs, que resulta ser el primer intento exitoso para explicar la masa de las partículas elementales a partir de otros principios más básicos. En el estado actual de desarrollo del modelo Estándar, y mientras no se haya detectado el bosón de Higgs, no es posible determinar si se trata en realidad de una nueva partícula elemental (como el mismo grado de estructura que electrón) o es tan solo una partícula compuesta por otros constituyentes más fundamentales. Lo único que sabemos es que su presencia dentro del modelo Estándar es necesaria para que la teoría sea autoconsistente y predictiva, a tal grado que sus predicciones concuerden con todos los resultados obtenidos hasta hoy en los grandes aceleradores de partículas.

En el lenguaje de la física se dice que existe una simetría cuando se presenta una invariancia de una ley física con respecto a transformaciones que actúan sobre los elementos que participan en ella. Por ejemplo, el campo de una carga eléctrica tiene una simetría esférica, porque las ecuaciones que lo describen son invariantes frente a rotaciones especiales. Las simetrías pueden incluir transformaciones de naturaleza no geométrica, en cuyo caso se dicen que son de simetría internas o globales, como por ejemplo, las asociadas a la conservación de la carga eléctrica. Si las transformaciones dependen de las coordenadas espaciotemporales del punto donde se aplica, se dice que son simetrías globales. La simetría llamada de norma del modelo Estándar pertenece a este último tipo. Las teorías que describen las interacciones entre las partículas elementales satisfacen dos propiedades fundamentales:

1. Se derivan de un principio geométrico asociado a la invariancia ante transformaciones de norma locales. Son transformaciones de norma porque no cambian la magnitud de las probabilidades de transición entre diferentes estados del sistema.
2. Este principio determina la dinámica del sistema, esto es, las ecuaciones que describen su movimiento. En particular, predice que los transmisores o de norma: el fotón para la interacción electromagnética, los bosones W^+ y Z^0 para la nuclear débil, los gluones para la interacción nuclear fuerte y los gravitones para las interacciones gravitacionales.

En el caso de las teorías de norma, la simetría original se rompe espontáneamente mediante el mecanismo de Higgs. Se realiza partiendo de un campo que es invariante ante la simetría interna del estado base o mínima energía. Para que la teoría resultante tenga sentido, es necesario cambiar el estado base, y como resultado se rompe la simetría y se generan las masas de los fermiones y bosones de norma a través de la interacción del campo de Higgs con ellos mismos. De manera que adquieren masa los bosones W y Z , pero no el fotón; la interacción electromagnética sigue siendo de largo alcance, mientras que la nuclear débil se transforma en una de corto alcance, determinado por el inverso de la masa del W y Z .

OBJETIVOS

General

Estudiar los diferentes mecanismos para generar masas de partículas según el **Modelo Estándar**

Específicos

1. Analizar la generación de masas en modelos con dobletes de **Higgs**
2. Analizar la generación de masas en modelos con simetría izquierda-derecha.

INTRODUCCIÓN

Uno de los temas más interesantes en la física de partículas elementales es el mecanismo para generar las masas de partículas conocidas: quarks, leptones y bosones intermedios. La teoría que actualmente es consistente con todos los resultados experimentales conocidos es el Modelo Estándar de las interacciones electrodébiles. Este modelo incluye un proceso, conocido como mecanismo de Higgs, que genera las masas de estas partículas a partir de la interacción de una partícula nueva: el bosón de Higgs. En caso de que se logre descubrir este bosón en los experimentos que se están realizando en el CERN, esta será la primera vez en que una teoría puede explicar el origen de la masa a partir de primeros principios. Existen algunos modelos que se proponen como alternativa para el modelo Estándar a muy altas energías. En este trabajo de graduación se estudiará los mecanismos que propone cada uno de ellos para generar la masa de las partículas incluidas en ellos.

1. MODELO ESTÁNDAR

El **Modelo Estándar**, incorporando la **Teoría Electrodébil** y la **Cromodinámica Cuántica** ha sido enormemente exitosa al describir y predecir los datos experimentales. Este modelo involucra una invariancia de norma local con simetría $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$, la cual contiene tres generaciones de leptones y quark e incorpora el rompimiento espontáneo electrodébil. El sector $SU(3)$, conocido como **Cromodinámica Cuántica**, describen la interacción fuerte la cual tiene ocho **bosones** de norma llamados **gluones** con diferentes números cuánticos de color.

El sector $SU(2) \otimes U(1)$, conocido como Teoría Electrodébil describe las interacciones eléctricas y débiles, llamadas de manera colectiva **interacciones electrodébiles**, las cuales tienen $3 + 1$ bosones de norma. Las interacciones eléctricas y débiles son unificadas utilizando la mezcla del bosón de norma neutro de $SU(2)$ y el bosón de norma de **hipercarga** de $U(1)$. El bosón de Higgs (H), es introducido a través del proceso de rompimiento espontáneo de la simetría (**Mecanismo de Higgs**) el cual otorga masa a las partículas. Todas las partículas correspondientes al **Modelo Estándar** han sido descubiertas excepto el **bosón de Higgs**.

1.1. Cromodinámica Cuántica

La **Cromodinámica Cuántica** *QCD*, es una **teoría de norma renormalizable** basada en el grupo $SU(3)$ con un triplete de quarks *up* (u), *down* (d) y *strange* (s) que fijan la densidad lagrangiana en *QCD*:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \sum_{A=1}^8 F^{A\mu\nu} F_{\mu\nu}^A + \sum_{j=1}^{n_f} \bar{q}_j (iD - m_j) q_j \quad (1.1)$$

donde: q_j son los campos de quarks (de distintos sabores n_f) con masas m_j ;
 $D = D_\mu \gamma^\mu$, donde γ^μ son las matrices de Dirac y D_μ es la derivada covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu - ie_s \sum_A t^A g_\mu^A; \quad (1.2)$$

y e_s es el acoplamiento de norma; en analogía con la Electrodinámica Cuántica *QED*:

$$\alpha_s = \frac{e_s^2}{4\pi} \quad (1.3)$$

(En unidades naturales $\hbar = c = 1$); g_μ^A ($A = 1, 2, 3, 4, \dots, 8$), son los campos de gluón y t^A son los generadores de grupo $SU(3)$ en la representación de triplete de quarks (t^A son matrices 3×3 actuando en q).

El grupo es no abeliano debido a que no todos los generadores conmutan entre sí $[t^A, t^B] = iC_{ABC} t^C$ donde C_{ABC} son las constantes reales llamadas las constantes de estructura del grupo $SU(3)$ (la normalización de C_{ABC} y de e_s se especifica por $Tr[t^A, t^B] = 1/2\delta^{AB}$)

Por otra parte:

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu g_\nu^A - \partial_\nu g_\mu^A - e_s C_{ABC} g_\mu^B g_\nu^C \quad (1.4)$$

El lagrangiano en la QCD , ecuación (1.1) es el lagrangiano para quarks interactuantes coloreados q , lo cual se sigue simplemente de pedir que el lagrangiano sea invariante bajo transformaciones de fase de color locales para los campos de quarks. Puesto que los tres campos de color de quarks pueden ser variados arbitrariamente, no es sorprendente que ocho campos vectoriales de color sean necesarios para compensar todos los posibles cambios de fase. Tal como sucede con el fotón la invariancia de norma local requiere que los gluones no tengan masa.

El tensor de campo $F_{\mu\nu}^A$ posee una gran propiedad. Imponer la simetría de norma ha requerido que el término de la energía cinética en \mathcal{L} no sea puramente cinético sino que incluya una autointeracción inducida entre los **bosones de norma**. Esto se observa claramente reescribiendo (1.1) de forma simbólica

$$\mathcal{L} = \bar{q}q + F^2 + e_s \bar{q}qF + q^3 F^3 + e_s^2 F^4 \quad (1.5)$$

Los primeros tres términos tienen sus análogos en QED . Ellos describen la propagación libre de quarks y gluones y la interacción quark-gluón. Los dos términos restantes muestran la presencia de vértices de tres y cuatro gluones en QCD y reflejan el hecho de que los gluones en sí mismos no transportan carga de color. Estos no tienen paralelo en QED y resalta el carácter no abeliano del grupo de norma. Teorías con invariancia de norma no abeliana son frecuentemente llamadas **teorías de Yang Mills**.

1.2. Interacciones Electrodébiles

Si intentamos generar una teoría renormalizable de las interacciones débiles y electromagnéticas por rompimiento espontáneo de simetría, la cuestión es cuál es la simetría de norma de las interacciones electrodébiles. Los datos sobre procesos débiles y electromagnéticos sugieren que las interacciones son invariantes bajo transformaciones de isospin débil $SU(2)$ y transformaciones de hipercarga débil $U(1)$. De manera que el primer intento será con un lagrangiano invariante ante transformaciones $SU(2) \times U(1)$.

Dividimos el lagrangiano electrodébil en dos partes separando el acoplamiento del bosón de Higgs:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{symm} + \mathcal{L}_{Higgs} \quad (1.6)$$

Empezamos especificando \mathcal{L}_{sym} , el cual involucra únicamente los bosones de norma y fermiones

$$\mathcal{L}_{symm} = -\frac{1}{4} \sum_{A=1}^3 F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \bar{\psi}_L i\gamma^\mu D_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu D_\mu \psi_R. \quad (1.7)$$

Este es el lagrangiano Yang-Mills para el grupo de norma $SU(2) \otimes U(1)$ con campos de materia fermiónica. Aquí definimos

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad y \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu^A - \partial_\nu W_\mu^A - g\epsilon_{ABC} W_\mu^B W_\nu^C \quad (1.8)$$

son los tensores de norma antisimétricos construidos del campo de norma B_μ asociado con $U(1)$ y W_μ^A correspondientes a los tres generadores $SU(2)$; ϵ_{ABC} son las constantes de estructura de grupo

Los campos fermiónicos son descritos a través de sus componentes de helicidad izquierda y derecha:

$$\psi_{L,R} = [(1 \mp \gamma_5)/2]\psi, \quad \bar{\psi}_{L,R} = \bar{\psi}[(1 \pm \gamma_5)/2]. \quad (1.9)$$

La teoría electrodébil, es una teoría quiral en el sentido que ψ_L y ψ_R se comportan distinto bajo el grupo de norma. En particular, todos los ψ_R son singuletes y todos los ψ_L son dobletes ante el grupo $SU(2)$ del Modelo Estándar. Entonces, los términos de masa para fermiones (de la forma $\bar{\psi}_L \psi_R + \text{conjugado hermitico}(hc)$) son ignorados en el límite de simetría. Las masas fermiónicas serán introducidas, junto con W^\pm y Z^0 , por el mecanismo de rompimiento de simetría. Las derivadas covariantes $D_\mu \psi_{L,R}$ son explícitamente dadas por

$$D_\mu \psi_{L,R} = \left[\partial_\mu + ig \sum_{A=1}^3 t_{L,R}^A W_\mu^A + ig' \frac{1}{2} Y_{L,R} B_\mu \right] \psi_{L,R}, \quad (1.10)$$

Donde $t_{L,R}^A$ y $1/2Y_{L,R}$ son generadores de $SU(2)$ y $U(1)$, respectivamente, en las representaciones reducibles $\psi_{L,R}$. Las relaciones de conmutación de $SU(2)$ están dadas por

$$[t_L^A, t_L^B] = i\epsilon_{ABC}t_L^C \quad y \quad [t_R^A, t_R^B] = i\epsilon_{ABC}t_R^C, \quad (1.11)$$

y usamos la normalización $\text{Tr}[t^A t^B] = 1/2\delta^{AB}$ en la representación fundamental de $SU(2)$. El generador de carga eléctrica Q (en unidades de e , la carga del positrón) está dado por

$$Q = t_L^3 + 1/2Y_L = t_R^3 + 1/2Y_R \quad (1.12)$$

Todos los acoplamientos fermiónicos de los bosones de norma pueden ser derivados directamente por las ecuaciones (1.7) y (1.10). Los acoplamientos de corriente cargada (CC), son los mas sencillos,

$$\begin{aligned} g(t^1 W_\mu^1 + t^2 W_\mu^2) &= g\{[(t^1 + it^2)/\sqrt{2}](W_\mu^1 - iW_\mu^2)/\sqrt{2} + \text{h.c.}\} \\ &= \{[(t^+ W_\mu^-)/\sqrt{2}] + \text{h.c.}\}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde $t^\pm = t^1 \pm it^2$ y $W^\pm = (W^1 \pm iW^2)/\sqrt{2}$. Y con ello obtenemos los vértices:

$$V_{\bar{\psi}\psi W} = g\bar{\psi}\gamma_\mu \left[(t_L^+/\sqrt{2})(1 - \gamma_5)/2 + (t_R^+/\sqrt{2})(1 + \gamma_5)/2 \right] \psi W_\mu^- + \text{h.c.} \quad (1.14)$$

En el sector de corriente neutra (NC), el fotón A_μ y el bosón Z_μ son ortogonales y combinaciones lineales normalizadas de B_μ y W_μ^3 :

$$\begin{aligned} A_\mu &= \cos\theta_W B_\mu + \sin\theta_W W_\mu^3, \\ Z_\mu &= -\sin\theta_W B_\mu + \cos\theta_W W_\mu^3. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Las ecuaciones (1.15) definen el ángulo de mezcla débil. El fotón se caracteriza por los acoplamientos iguales de los fermiones izquierdo y derecho con una magnitud igual a la carga eléctrica. Recordando la ecuación (1.13) para la matriz de carga Q , obtenemos inmediatamente:

$$g \sin\theta_W = g \cos\theta_W = e \quad (1.16)$$

o equivalentemente

$$\tan \theta_W = g'/g \quad (1.17)$$

Una vez que θ_W ha sido fijado para los acoplamientos de fotones, es simplemente algebra el derivar los acoplamientos del Z^0 , con el resultado

$$\Gamma_{\bar{\psi}\psi Z} = g/(2 \cos \theta_W) \bar{\psi} \gamma_\mu [t_L^3(1 - \gamma_5) + t_R^3(1 + \gamma_5) - 2Q \sin^2 \theta_W] \psi Z^\mu, \quad (1.18)$$

donde $\Gamma_{\bar{\psi}\psi Z}$ es una notación compacta para los vértices. En el Modelo Estándar, $t_R^3 = 0$ y $t_L^3 = \pm 1/2$.

Ahora, vamos al sector Higgs del lagrangiano electrodébil. El lagrangiano de Higgs está especificado para el principio de invariancia de norma local y que cumpla el requisito de renormalización

$$\mathcal{L}_{Higgs} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) - \bar{\psi}_L \Gamma \psi_R \phi - \bar{\psi}_R \Gamma^\dagger \psi_L \phi^\dagger, \quad (1.19)$$

donde ϕ es un vector columna que incluye todos los campos de Higgs escalares; se transforma como una representación reducible de un grupo de norma. Las cantidades Γ (las cuales incluyen todas las constantes de acoplamiento) son matrices que hacen los acoplamientos invariantes de Yukawa bajo grupos de Lorentz y de norma. El potencial $V(\phi^\dagger \phi)$, simétrico bajo $SU(2) \otimes U(1)$, contiene, como máximo, términos a la cuarta en ϕ para que la teoría sea renormalizable:

$$V(\phi^\dagger \phi) = -\frac{1}{2} \mu^2 \phi^\dagger \phi + \frac{1}{4} \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (1.20)$$

Los rompimientos espontáneos de simetría son inducidos en condiciones de mínimo potencial, dicho rompimiento tiene lugar como cambio en la representación del estado base lo que da lugar al apareamiento de masa de fermiones y bosones de norma, a través de la interacción del campo de Higgs con ellos mismos. Por lo tanto, denotamos el valor esperado de vacío (VEV) de ϕ , es decir, la posición del mínimo, por v :

$$\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = v \neq 0. \quad (1.21)$$

La matriz de masa fermiónica se obtiene de los acoplamientos Yukawa reemplazando $\phi(x)$ por v

$$M = \bar{\psi}_L \mathcal{M} \psi_R + \bar{\psi}_R \mathcal{M}^\dagger \psi_L, \quad (1.22)$$

con

$$\mathcal{M} = \Gamma \cdot v. \quad (1.23)$$

En el Modelo Estándar, donde todos los fermiones izquierdos ψ_L son dobletes y todos los fermiones derechos ψ_R son singuletes, sólo los dobletes de Higgs pueden contribuir a la masa de los fermiones. Existen suficientes acoplamientos libres en Γ , así que basta un solo doblete complejo Higgs para generar la matriz general de masa de fermiones. Es importante observar que por un cambio de base podemos siempre hacer la matriz M hermítica, γ_5 -libre y diagonal. De hecho, podemos hacer transformaciones unitarias separadas sobre ψ_L y ψ_R de acuerdo con:

$$\psi'_L = U \psi_L, \quad \psi'_R = V \psi_R \quad (1.24)$$

y consecuentemente:

$$M \rightarrow M' = U^\dagger M V \quad (1.25)$$

Esta transformación no altera la estructura general de los acoplamientos de fermiones en \mathcal{L}_{symm} .

Si sólo un doblete de Higgs está presente, el cambio de base que hace M diagonal hará al mismo tiempo la diagonalización del acoplamiento de **fermion-Higgs Yukawa**. Entonces, en este caso, no existirán cambios de sabor de Higgs neutros. Esto no es cierto, en general, cuando hay muchos dobletes de Higgs. Pero un doblete de Higgs por cada sector de carga eléctrica, es decir, un doblete se acoplará únicamente a un quark tipo u , un doblete y un quark tipo d , un doblete a un leptón cargado también será correcto, debido a que las matrices de masas de fermiones con diferentes cargas son diagonalizadas por separado.

De hecho, el modelo más sencillo con un sólo doblete de Higgs se ve más adecuado para describir todos los fenómenos observados hasta ahora.

Las corrientes cargadas débiles son las únicas interacciones en el Modelo Estándar que cambian sabor, por emisión de un W un quark tipo up se vuelve en un quark tipo $down$, o un neutrino ν_l se vuelve en un leptón l^- cargado (todos los fermiones son izquierdos). Si empezamos de un quark up que es un eigenvalor de masa, la emisión de un W lo vuelve en un quark tipo d' (el isospín débil compañero de up) que en general no es un eigenvalor de masa. En general, los eigenvalores de masa y los eigenestados débiles no coinciden y una transformación unitaria conecta los dos conjuntos:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

O, dicho de otra manera, $D' = VD$, donde V es la **matriz Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM)**. Entonces en términos de los eigenestados de masa la corriente débil cargada de quarks es de la forma:

$$J_\mu^+ \propto \bar{U} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) VD \quad (1.27)$$

Ya que V es unitaria, y conmuta con T^2, T^3 y Q (debido a que todos los quarks tipo $down$ tienen el mismo isospin y carga) los acoplamientos de corriente neutral son ambos diagonales, en la base primada y no primada (si la corriente de quarks tipo $Z down$ se abrevia como $\bar{D}'\Gamma D'$ entonces cambiando la base tenemos $\bar{D}V^\dagger\Gamma VD$). Se sigue entonces que $\bar{D}'\Gamma D' = \bar{D}\Gamma D$. Este es el **mecanismo Glashow-Iliopoulos-Maiani (GIM)** que asegura la conservación natural del sabor de los acoplamientos de corriente neutra en tres niveles. Para tres generaciones de quarks de la matriz CKM depende de cuatro parámetros físicos: tres ángulos de mezcla y uno de fase. Esta fase es la única fuente de violación de CP en el Modelo Estándar.

Ahora consideramos las masas de los bosones de norma y sus acoplamientos con el Higgs. Estos efectos son inducidos por el términos $(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi)$ en \mathcal{L}_{Higgs} (1.19), donde:

$$D_\mu = [\partial_\mu \sum_{A=1}^3 t^A W_\mu^A + ig'(Y/2)B_\mu]\phi \quad (1.28)$$

Donde t^A y $1/2Y$ son los generadores $SU(2)\otimes U(1)$ en la representación reducible atravesada por ϕ . No sólo las representaciones de Higgs de dobletes sino todos los diferentes de singuletes pueden contribuir a las masas de los bosones de norma . La condición de que el fotón permanezca sin masa es equivalente a la condición de que el vacío es eléctricamente neutro:

$$Q | v \rangle = (t^3 + \frac{1}{2}Y) | v \rangle = 0 \quad (1.29)$$

La masa del W cargado dada por los términos cuadráticos en el campo W proviene de \mathcal{L}_{Higgs} , cuando $\phi(x)$ es reemplazada por v . Obtenemos:

$$m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} = g^2 | (t^+ v \sqrt{2}) |^2 W_\mu^+ W^{-\mu} \quad (1.30)$$

Mientras que para la masa Z^0 tenemos, [recordando ec. (15)]:

$$\frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu = | [g \cos \theta_W t^3 - g' \sin \theta_W (Y/2)]v |^2 Z_\mu Z^\mu \quad (1.31)$$

Donde el factor de $1/2$ en el lado izquierdo es la normalización correcta para la definición de la masa de un campo neutro. Para dobletes de Higgs:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

Obtenemos:

$$m_W^2 = 1/2g^2v^2, m_z^2 = 1/2g^2v^2/\cos^2 \theta_W \quad (1.33)$$

Es también evidente que para todo doblete de Higgs:

$$\rho_o = m_W^2/m_Z^2 \cos^2 \theta_W = 1 \quad (1.34)$$

Esta relación es típica de uno o más dobletes de Higgs y sería estropeada por la existencia, por ejemplo, de los tripletes de Higgs. Este resultado es válido a niveles de aproximación de árbol y es modificado por pequeñas correcciones radiativas electrodébiles calculables. El parámetro ρ_o ha sido medido de la intensidad de interacciones NC y se ha confirmado estar cerca a la unidad. En la versión mínima del Modelo Estándar, sólo un doblete de Higgs está presente. Entonces los acoplamientos de Higgs de fermiones son proporcionales a la masa de fermiones.

En el mínimo del Modelo Estándar, tres de los cuatro campos hermíticos son removidos del espectro físico del mecanismo de Higgs y se convierten modos longitudinales de W^+ , W^- , y Z^0 los cuales adquieren masa. El cuarto Higgs neutro es físico y debe ser encontrado. Si existen más dobletes, dos más cargados y dos más neutros escalares Higgs deben existir por cada doblete adicional. Los acoplamientos del Higgs físico H a los bosones de norma pueden ser simplemente obtenidos por \mathcal{L}_{Higgs} reemplazando:

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ v + (H/\sqrt{2}) \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

[asi que $(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) = 1/2(\partial_\mu H)^2 + \dots$], con el resultado:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & g^2(v/\sqrt{2})W_\mu^+W^{-\mu}H + (g^2/4)W_\mu^+W^{-\mu}H^2 \\ & + [(g^2vZ_\mu Z^\mu)/(2\sqrt{2}\cos^2\theta_W)]H \\ & + [g^2/(8\cos^2\theta_W)]Z_\mu Z^\mu H^2 \end{aligned} \quad (1.36)$$

En el mínimo del Modelo Estándar la masa de Higgs $m_H^2 \sim \lambda v^2$ es del orden de la escala débil v pero no puede ser predicha porque el valor de λ no está fijo.

2. MODELOS CON DOS DOBLETES DE HIGGS

A pesar que el Modelo Estándar ha tenido mucho éxito describiendo, la fenomenología de partículas elementales, el sector de Higgs continua siendo una teoría poco conocida y no hay razón fundamental para asumir que el sector de Higgs debe de ser mínimo. Sin embargo podemos saber que el sector de Higgs no es mínimo. Por supuesto, por argumentos de simplicidad, consideremos la siguiente extensión mínima como el mejor candidato. La extensión simplificada compatible con la invarianza de norma es también llamada modelo con dos dobletes de Higgs ($2HDM$), que consiste en adicionar un segundo doblete de Higgs, con los mismos números cuánticos que el primero.

Otra motivación para introducir el segundo doblete de Higgs viene de la jerarquía del acoplamiento de Yukawa en la tercera generación de quarks, la razón entre la masa de los quarks *top* y *bottom* es del orden de aproximadamente 35. En el Modelo Estándar, la masa de ambos quarks viene del mismo doblete de Higgs, consecuentemente, esto implica una jerarquía no natural entre sus correspondientes acoplamientos de Yukawa. Sin embargo, si el quark *bottom* recibe su masa de un doblete ϕ_1 y el quark *top* de otro doblete ϕ_2 , entonces la jerarquía de sus acoplamientos de Yukawa puede ser más natural si los parámetros libres de la teoría adquieren los valores apropiados.

Finalmente, otra motivación para estudiar el $2HDM$ es el hecho que algunos modelos tienen límites a bajas energías con un sector de Higgs no mínimo. Dos dobletes de Higgs son necesarios en un modelo supersimétrico y el llamado $2HDM$ tipo *II*, tiene el mismo acoplamiento de Yukawa con el modelo mínimo estándar supersimétrico ($MSSM$). En particular si las partículas supersimétricas son suficientemente pesadas, el sector de Higgs del $MSSM$ se vuelve un $2HDM$ tipo *II* a bajas energías.

El modelo supersimétrico, *SUSY*, con dos dobletes de Higgs puede proveer soluciones para algunos problemas del Modelo Estándar, como la masa de Higgs a muy altas escalas; la jerarquía de la escala de Planck y la electrodébil; la jerarquía de la masa en la familia fermiónica y la existencia de masa de neutrinos y oscilación de neutrinos.

2.1. El potencial de Higgs

Introduzcamos un nuevo doblete de Higgs que es la réplica del primero, el sector de Higgs incluye dos dobletes de Higgs con el mismo número cuántico

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1^\dagger \\ \phi_1^0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2^\dagger \\ \phi_2^0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

con hipercarga $Y_1 = Y_2 = 1$, en general, ambos dobletes pueden adquirir un Valor Esperado en el Vacío (*VEV*) de:

$$\langle \Phi_1 \rangle = \frac{v_1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \langle \Phi_2 \rangle = \frac{v_2}{\sqrt{2}} e^{i\theta} \quad (2.2)$$

es más conveniente parametrizar el doblete de la siguiente forma

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1^\dagger \\ \frac{h_1 + v_1 + ig_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad ; \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2^\dagger \\ \frac{h_2 + v_2 e^{i\theta} + ig_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Ahora, examinamos cada parte del Lagrangiano que acopla el doblete de Higgs. Antes de escribir la forma más general del potencial de Higgs renormalizado compatible con la invariancia de norma, consideremos los siguientes operadores invariantes de norma y escribamos todos los posibles hermíticos bilineales e interacciones cuárticas compatibles con la invariancia de norma:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \Phi_1^\dagger \Phi_1, \hat{B} = \Phi_2^\dagger \Phi_2, \hat{C} = \frac{1}{2}(\Phi_1^\dagger \Phi_2 + \Phi_2^\dagger \Phi_1) = Re(\Phi_1^\dagger \Phi_2), \\ \hat{D} &= -\frac{i}{2}(\Phi_1^\dagger \Phi_2 - \Phi_2^\dagger \Phi_1) = Im(\Phi_1^\dagger \Phi_2) \end{aligned}$$

entonces el potencial V_g se puede escribir

$$\begin{aligned} V_g &= -\mu_1^2 \hat{A} - \mu_2^2 \hat{B} - \mu_3^2 \hat{C} - \mu_4^2 \hat{D} + \lambda_1 \hat{A}^2 + \lambda_2 \hat{B}^2 + \lambda_3 \hat{C}^2 + \lambda_4 \hat{D}^2 \\ &\quad + \lambda_5 \hat{A} \hat{B} + \lambda_6 \hat{A} \hat{C} + \lambda_8 \hat{A} \hat{D} + \lambda_7 \hat{B} \hat{C} + \lambda_9 \hat{B} \hat{D} + \lambda_{10} \hat{C} \hat{D} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Pero si asumimos que el potencial de Higgs posee una carga conjugada invariante (C - invariante), entonces la ecuación se reduce a

$$V = -\mu_1^2 \hat{A} - \mu_2^2 \hat{B} - \mu_3^2 \hat{C} + \lambda_1 \hat{A}^2 + \lambda_2 \hat{B}^2 + \lambda_3 \hat{C}^2 + \lambda_4 \hat{D}^2 + \lambda_5 \hat{A} \hat{B} + \lambda_6 \hat{A} \hat{C} + \lambda_7 \hat{B} \hat{C} \quad (2.5)$$

Es importante decir que en este paso, la invarianza de la conjugación de cargas es equivalente a la invarianza CP desde que los campos son escalares. Bajo la conjugación de la carga, un doblete de Higgs Φ_i de $Y = 1$, se transforma como $\Phi_i \rightarrow e^{i\alpha_i} \Phi_i^*$, donde el parámetro α_i es arbitrario. Sin embargo el lagrangiano (2.5) puede inducir violación espontánea CP . Estas son dos maneras de la imposición natural para un mínimo del potencial para ser un invariante ante CP . El primero consiste en una invarianza bajo simetría Z_2 donde $\Phi_1 \rightarrow \Phi_1$, $\Phi_2 \rightarrow -\Phi_2$. El potencial resultante que será denotado por V'_A es

$$V'_A = -\mu_1^2 \hat{A} - \mu_2^2 \hat{B} + \lambda_1 \hat{A}^2 + \lambda_2 \hat{B}^2 + \lambda_3 \hat{C}^2 + \lambda_4 \hat{D}^2 + \lambda_5 \hat{A} \hat{B} \quad (2.6)$$

y corresponde a fijar $\mu_3^2 = \lambda_6 = \lambda_7 = 0$ en (2.5). Si permitimos un término de rompimiento suave de la forma $-\mu_3^2 \hat{C}$, una violación espontánea CP ocurre, en este caso el potencial es

$$V_A = V'_A - \mu_3^2 \hat{C} \quad (2.7)$$

El otro potencial sin violación espontánea CP resulta de la imposición de la simetría global $\Phi_2 \rightarrow e^{i\phi} \Phi_2$. Este potencial es:

$$V'_B = -\mu_1^2 \hat{A} - \mu_2^2 \hat{B} + \lambda_1 \hat{A}^2 + \lambda_2 \hat{B}^2 + \lambda_3 (\hat{C}^2 + \hat{D}^2) + \lambda_5 \hat{A} \hat{B} \quad (2.8)$$

y es obtenido usando $\mu_3^2 = \lambda_6 = \lambda_7 = 0$ y $\lambda_3 = \lambda_4$ en (2.5). Desde que tenemos un rompimiento de simetría global para el potencial V'_B , este es un bosón de Goldstone extra en la teoría.

Adicionalmente es costumbre permitir un término de rompimiento suave $\mu_3^2 \hat{C}$ en el lagrangiano (2.8) obteniendo

$$V_B = V'_B - \mu_3^2 \hat{C} \quad (2.9)$$

Las masas y eigenestados de Higgs estan definidos en términos de parámetros μ_i, λ_i para el potencial, consecuentemente dependen de la elección del potencial. ahora, consideremos el caso de conservación CP para que el Valor Esperado en el Vacío (VEV), en el caso del sector de Higgs, consiste en el siguiente espectro, dos escalares de CP par Higgs (H^0, h^0), un escalar de CP impar (A^0), dos bosones de Higgs cargados (H^\pm) y los bosones de Goldstone (G^\pm, G^0) correspondiente W^\pm, Z^0 respectivamente. Los eigenestados de masa son obtenidos de la definición de los eigenestados de norma en (2.3), de las siguientes transformaciones

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_2^+ \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} G^+ \\ H^+ \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} H^0 \\ h^0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} G^0 \\ A^0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Donde

$$\tan \beta = \frac{v_2}{v_1}, \quad \sin \beta = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

y α es ángulo de mezcla para un bosón de Higgs CP par. $\tan \beta$ es un nuevo parámetro que aparece del hecho que ambos dobletes de Higgs pueden adquirir VEV . Ahora resumimos el resultado obtenido en el Apendice.

Para el potencial V (2.5), las mínimas condiciones son

$$\begin{aligned} 0 &= T_a = -\mu_1^2 + \lambda_1 v_1^2 \\ 0 &= T_B = -\mu_3^2 + \frac{\lambda_6 v_1^2}{2} \end{aligned}$$

Las masas de Higgs y el ángulo de mezcla α , son

$$\begin{aligned} m_{H^\pm}^2 &= -\mu_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2, \quad m_{A^0} = \frac{1}{2}(\lambda_4 + \lambda_5)v_1^2 \\ m_{H^0, h^0} &= (\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_+)v_1^2 - \frac{1}{2}\mu_2^2 \pm k_1 \\ k_1 &= \sqrt{4\lambda_1 v_1^2 (\lambda_1 v_1^2 + \mu_2^2 - v_1^2 \lambda_+) + (\lambda_+^2 v_1^2 + \lambda_6^2 v_1^2 - 2\mu_2^2 \lambda_+)v_1^2 + \mu_2^4} \\ \tan 2\alpha &= \frac{\lambda_6 v_1^2}{(2\lambda_1 - \lambda_+)v_1^2 + \mu_2^2} \end{aligned}$$

Para el potencia V'_A (2.6), las condiciones mínimas son

$$\begin{aligned} 0 &= T_1 = v_1(-\mu_1^2 + \lambda_1 v_1^2 + \lambda_+ v_2^2) \\ 0 &= T_2 = v_2(-\mu_2^2 + \lambda_2 v_2^2 + \lambda_+ v_1^2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde $\lambda_+ = \frac{1}{2}(\lambda_3 + \lambda_5)$. Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned} ii) \quad v_1^2 &= \frac{\lambda_2 \mu_1^2 - \lambda_+ \mu_2^2}{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_+^2}, \quad v_2^2 = \frac{\lambda_1 \mu_2^2 - \lambda_+ \mu_1^2}{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_+^2} \\ v_2^2 &= 0, \quad v_1^2 = \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} \end{aligned}$$

Para $i)$ las masas de los bosones de Higgs y los ángulos de mezcla α son :

$$\begin{aligned} m_{H^\pm} &= -\lambda_3(v_1^2 + v_2^2), \quad m_{A^0} = \frac{1}{2}(\lambda_4 - \lambda_3)(v_1^2 + v_2^2) \\ m_{H^0, h^0}^2 &= \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 \pm \sqrt{(\lambda_1 v_1^2 - \lambda_2 v_2^2)^2 + 4v_1^2 v_2^2 \lambda_+^2} \\ \tan 2\alpha &= \frac{2v_1 v_2 \lambda_+}{\lambda_1 v_1^2 - \lambda_2 v_2^2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

y para $ii)$ tenemos

$$\begin{aligned} m_{H^+}^2 &= -\mu_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2, \quad m_{A^0}^2 = -\mu_2^2 + \frac{1}{2}(\lambda_4 + \lambda_5)v_1^2, \\ m_{H^0}^2 &= 2\lambda_1 v_1^2, \quad m_{h^0}^2 = -\mu_2^2 + \frac{1}{2}(\lambda_3 + \lambda_5)v_1^2, \quad \tan 2\alpha = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

y para el potencial V_B (2.9) las condiciones mínimas son

$$\begin{aligned} 0 &= T_1 - \frac{\mu_3^2}{2}v_2 \\ 0 &= T_2 - \frac{\mu_3^2}{2}v_1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2 \pm Z_1}{2(\lambda_1 - \lambda_+)(\lambda_2 - \lambda_+)} \\ v_2^2 &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1 \pm Z_2}{2(\lambda_1 - \lambda_+)(\lambda_2 - \lambda_+)} \\ Z_1 &= \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 4(\lambda_1 - \lambda_+)(\lambda_2 - \lambda_+)[(\lambda_+ v^2 - \mu_1^2)(\lambda_+ v^2 - \mu_2^2) - \frac{1}{4}\mu_3^4]} \\ Z_2 &= \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 4(\lambda_2 - \lambda_+)(\lambda_1 - \lambda_+)[(\lambda_+ v^2 - \mu_2^2)(\lambda_1 v^2 - \mu_1^2) - \frac{1}{4}\mu_3^4]} \end{aligned}$$

Las masas y el ángulo de mezcla α estan dados por

$$\begin{aligned}
m_{H^\pm} &= -\lambda_3(v_1^2 + v_2^2) + \mu_3^2 \frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1 v_2}, & m_{A^0}^2 &= \frac{1}{2} \mu_3^2 \frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1 v_2} \\
m_{H^0, h^0} &= \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \frac{1}{4} \mu_3^2 (\tan \beta + \cot \beta) \\
&\pm \sqrt{[\lambda_1 v_1^2 - \lambda_2 v_2^2 + \frac{1}{4} \mu_3^2 (\tan \beta - \cot \beta)]^2 + (2v_1 v_2 \lambda_+ - \frac{1}{2} \mu_3^2)^2} \\
\tan 2\alpha &= \frac{2v_1 v_2 \lambda_+ - \frac{1}{2} \mu_3^2}{\lambda_1 v_1^2 - \lambda_2 v_2^2 + \frac{1}{4} \mu_3^2 (\tan \beta - \cot \beta)}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Observamos que la solución con uno de los VEV 's igual a cero no es posible para el potencial V_B .

Los potenciales V'_A y V_B son diferentes porque difieren en una relación cúbica y cuártica.

2.2. Restricciones Unitarias

Para restringir los parametros de potenciales escalares del $2HDM$ uno puede demandar que la unitariedad de tres niveles pueda preservarse en una variedad de procesos de dispersión. Dispersión escalar-escalar, dispersión bosón de norma-bosón de norma y dispersión escalar-bosón de norma. Para encontrar dichos parámetros nos limitaremos a puros procesos escalares dominados por interacciones cuárticas. Por otra parte asumiremos que los vértices escalares cuárticos escritos en términos de campos físicos H^\pm , G^\pm, h^0, A^0 y G^0 son funciones muy complicadas de λ_i , α y β . Sin embargo los vértices cuárticos (computados antes en el rompimiento de simetrías electrodébiles) escritos en términos de campos no físicos ϕ_i^\pm , h_i y g_i ($i = 1, 2$) son expresiones considerablemente más simples. El conjunto de procesos de dispersión pueden ser expresados como una matriz S de 22×22 compuesta por cuatro submatrices [$\mathcal{M}_1(6 \times 6)$, $\mathcal{M}_2(6 \times 6)$, $\mathcal{M}_3(6 \times 6)$ y $\mathcal{M}_4(8 \times 8)$] que no se acopla con cada uno debido a la conservación de la carga y la invarianza CP .

La primera submatriz \mathcal{M}_1 corresponde a la dispersión cuyos estados finales e iniciales son uno de los siguientes $(\phi_1^+ \phi_2^-, \phi_2^+ \phi_1^-, h_1 g_2, h_2 g_1, g_1 g_2, h_1 h_2)$. Con la ayuda del Apéndice obtenemos,

$$\mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} 2\lambda_3 + \lambda_{56}^+ & \lambda_{56}^- & -\frac{i}{2}\lambda_{64}^- & -\frac{i}{2}\lambda_{64}^- & \frac{1}{2}\lambda_{54}^- & \frac{1}{2}\lambda_{54}^- \\ \lambda_{56}^- & 2\lambda_3 + \frac{1}{2}\lambda_{56}^+ & \frac{i}{2}\lambda_{64}^- & -\frac{i}{2}\lambda_{64}^- & \frac{1}{2}\lambda_{54}^- & \frac{1}{2}\lambda_{54}^- \\ \frac{i}{2}\lambda_{64}^- & -\frac{i}{2}\lambda_{64}^- & 2\lambda_3 + \lambda_6 & \frac{1}{2}\lambda_{56}^- & 0 & 0 \\ -\frac{i}{2}\lambda_{64}^- & \frac{i}{2}\lambda_{64}^- & \frac{1}{2}\lambda_{56}^- & 2\lambda_3 + \lambda_6 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\lambda_{54}^- & \frac{1}{2}\lambda_{54}^- & 0 & 0 & 2\lambda_3 + \lambda_5 & \frac{1}{2}\lambda_{56}^- \\ \frac{1}{2}\lambda_{54}^- & \frac{1}{2}\lambda_{54}^- & 0 & 0 & \frac{1}{2}\lambda_{56}^- & 2\lambda_3 + \lambda_5 \end{pmatrix}$$

donde $\lambda_{ij}^\pm = \lambda_i \pm \lambda_j$. Los siguientes valores eigenvalores de la matriz son:

$$\begin{aligned} e_1 &= 2\lambda_3 - \lambda_4 - \frac{1}{2}\lambda_5 + \frac{5}{2}\lambda_6 \\ e_2 &= 2\lambda_3 + \lambda_4 - \frac{1}{2}\lambda_5 + \frac{1}{2}\lambda_6 \\ f_+ &= 2\lambda_3 - \lambda_4 + \frac{5}{2}\lambda_5 - \frac{1}{2}\lambda_6 \\ f_- &= 2\lambda_3 + \lambda_4 + \frac{1}{2}\lambda_5 - \frac{1}{2}\lambda_6 \\ f_1 &= f_2 = 2\lambda_3 + \frac{1}{2}\lambda_5 + \frac{1}{2}\lambda_6 \end{aligned}$$

La segunda submatriz \mathcal{M}_2 corresponde a la dispersión con estados iniciales y finales como sigue: $(\phi_1^+ \phi_1^-, \phi_2^+ \phi_2^-, \frac{g_1 g_1}{\sqrt{2}}, \frac{g_2 g_2}{\sqrt{2}}, \frac{h_1 h_1}{\sqrt{2}}, \frac{h_2 h_2}{\sqrt{2}})$, y obtenemos

$$\mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} 4\lambda_{13}^+ & 2\lambda_3 + \frac{1}{2}\lambda_{56}^+ & \sqrt{2}\lambda_{13}^+ & \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\lambda}_{34} & \sqrt{2}\lambda_{13}^+ & \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\lambda}_{34} \\ 2\lambda_3 + \frac{1}{2}\lambda_{56}^+ & 4\lambda_{23}^+ & \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\lambda}_{34} & \sqrt{2}\lambda_{33}^+ & \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\lambda}_{34} & \sqrt{2}\lambda_{33}^+ \\ \sqrt{2}\lambda_{13}^+ & \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\lambda}_{34} & 3\lambda_{13}^+ & \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_{35} & \lambda_{13}^+ & \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_{36} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\lambda}_{34} & \sqrt{2}\lambda_{33}^+ & \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_{35} & 3\lambda_{23}^+ & \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_{36} & \lambda_{23}^+ \\ \sqrt{2}\lambda_{13}^+ & \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\lambda}_{34} & \lambda_{13}^+ & \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_{36} & 3\lambda_{13}^+ & \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_{35} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\lambda}_{34} & \sqrt{2}\lambda_{23}^+ & \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_{36} & \lambda_{23}^+ & \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_{35} & 3\lambda_{23}^+ \end{pmatrix}$$

donde $\tilde{\lambda}_{3i} = 2\lambda_3 + \lambda_i$. Entonces la matriz M_2 posee los siguientes eigenvalores

$$a_{\pm} = 3(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) \pm \sqrt{9(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (4\lambda_3 + \lambda_4 + \frac{1}{2}(\lambda_5 + \lambda_6))^2}$$

$$b_{\pm} = \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \pm \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \frac{1}{4}(-2\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6)^2}$$

$$c_{\pm} = \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \pm \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + \frac{1}{4}(\lambda_5 - \lambda_6)^2}$$

La tercera submatriz \mathcal{M}_3 corresponde a los de la base (h_1g_1, h_2g_2) y tenemos que

$$\mathcal{M}_3 = \begin{pmatrix} 2\lambda_{13}^+ & \frac{1}{2}\lambda_{56}^- \\ \frac{1}{2}\lambda_{56}^- & 2\lambda_{23}^+ \end{pmatrix}$$

sus eigenvalores son d_{\pm} y c_{\pm} con $d_{\pm} = c_{\pm}$. Y por último incluimos la dispersión de dos cuerpos entre los 8 estados cargados: $h_1\phi_1^+, h_2\phi_1^+, g_1\phi_1^+, g_2\phi_1^+, h_1\phi_2^+, h_2\phi_2^+, g_1\phi_2^+, g_2\phi_2^+$. Por lo tanto obtenemos la siguiente matriz

$$\mathcal{M}_4 = \begin{pmatrix} 2\lambda_{13}^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\lambda_{54}^- & 0 & -\frac{i}{2}\lambda_{64}^- \\ 0 & 2\lambda_3 + \lambda_4 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\lambda_{54}^- & 0 & \frac{i}{2}\lambda_{64}^- & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda_{13}^+ & 0 & 0 & \frac{i}{2}\lambda_{64}^- & 0 & \frac{1}{2}\lambda_{54}^- \\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda_3 + \lambda_4 & -\frac{i}{2}\lambda_{64}^- & 0 & \frac{1}{2}\lambda_{54}^- & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\lambda_{54}^- & 0 & \frac{i}{2}\lambda_{64}^- & 2\lambda_3 + \lambda_4 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\lambda_{54}^- & 0 & -\frac{i}{2}\lambda_{64}^- & 0 & 0 & 2\lambda_{33}^+ & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2}\lambda_{64}^- & 0 & \frac{1}{2}\lambda_{54}^- & 0 & 0 & 2\lambda_3 + \lambda_4 & 0 \\ -\frac{i}{2}\lambda_{64}^- & 0 & \frac{1}{2}\lambda_{54}^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda_{33}^+ \end{pmatrix}$$

Como podemos ver, la matriz contiene muchos elementos nulos, y los 8 eigenvalores obtenidos analíticamente son: $f_-, e_2, f_1, c_{\pm}, b_{\pm}, p_1$, donde

$$p_1 = 2(\lambda_3 + \lambda_4) - \frac{1}{2}\lambda_5 - \frac{1}{2}\lambda_6$$

Como podemos ver, estos canales adicionales permiten solo un eigenvalor extra, p_1 , podemos ver que estos eigenvalores juegan un papel importante para $M_{H\pm}$ y M_A .

2.3. El Lagrangiano Yukawa

El Lagrangiano de norma invariante más general que acopla los campos de Higgs con las lecturas de fermiones

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y = & \eta_{ij}^{U,0} \bar{Q}_{iL}^0 \bar{\Phi}_1 U_{jR}^0 + \eta_{ij}^{D,0} \bar{Q}_{iL}^0 \Phi_1 D_{jR}^0 + \xi_{ij}^{U,0} \bar{Q}_{iL}^0 \bar{\Phi}_2 U_{jR}^0 \\
& + \xi_{ij}^{D,0} \bar{Q}_{iL}^0 \Phi_2 D_{jR}^0 + \eta_{ij}^{E,0} \bar{l}_{iL}^0 E_{jR}^0 + \xi_{ij}^{E,0} \bar{l}_{iL}^0 E_{jR}^0 \\
& + \text{terminos de orden superior}(t.o.s)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Donde $\Phi_{1,2}$ representa los dobletes de Higgs, $\bar{\Phi} \equiv i\rho_2 \Phi_{1,2}$, $\eta_{i,j}^0$ y $\xi_{i,j}^0$, son matrices no diagonales de 3×3 donde i, j denotan índices familiares. D_R^0 se refiere a los tres isospines singuletes de quarks $D_R^0 \equiv (d_R^0, s_R^0, b_R^0)^T$, U se refiere a los tres singuletes de quarks débiles de tipo arriba $U_R^0 \equiv (u_R^0, c_R^0, t_R^0)^T$ y E_R^0 a los tres leptones cargados. Finalmente $\bar{Q}_{iL}^0, \bar{l}_{iL}^0$ denotan los leptones débiles de quarks *up* y los dobletes izquierdos respectivamente. El superíndice U indica que los campos no son eigenestados de masa aún.

De ahora en adelante, nos restringiremos a la discusión del sector de quarks únicamente, debido a que la extensión de los argumentos al sector de leptones es contínuo. Podemos ver del modelo descrito por la ecuacion(2.16) que en el caso más general, ambos bosones de higgs acoplados generan masas a los sectores *up* y *down* simultáneamente. Sin embargo, este caso general lleva a un proceso con Corrientes Neutrales de Cambio de Sabor, *FCNC* en tres niveles. Esto es basicamente debido a los eigenestados de norma, de los fermiones del sector *down* para obtener los eigenestados de masa no es posible diagonalizar ambas matrices de acoplamiento $\eta^{D,0}, \xi^{D,0}$ (la situación es similar para los sectores de leptones y los *up*).

Ahora, debido a que el proceso que contiene *FCNC* son fuertemente suprimidos experimentalmente, especialmente debido a las pequeñas diferencias de masa $K_L - K_S$, este proceso es considerado peligroso.

Consecuentemente, muchos mecanismos para evitar los tres niveles se han propuesto, por mencionar una posibilidad es el considerar el cambio de pesados campos Higgs escalares o pseudoescalares o, cancelando las grandes contribuciones con signos opuestos. Talvez el mecanismo más “elegante” o “natural” es el sugerido por Glashow y Weinberg, quien implementó una simetría discreta que automáticamente prohíbe el acoplamiento que generan esos decaimientos extraños.

Sabemos que las matrices $\eta^{U,0}$, $\xi^{U,0}$ no pueden ser diagonalizadas simultáneamente, y que lo mismo se aplica al acoplamiento de matrices $\eta^{D,0}$, $\xi^{D,0}$. Así que es inmediato notar que podemos suprimir el *FCNC* en tres niveles en el Lagrangiano (2.16), si nos libramos de un par de matrices ($\eta^{U,0}$, $\xi^{U,0}$) que acoplan el sector *up* de los dobletes Higgs, y lo mismo para el sector *down*.

Podemos obtener que, al implementar las siguientes simetrías discretas:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &\rightarrow \Phi_1, & y & \quad \Phi_2 \rightarrow -\Phi_2 \\ D_{jR} &\rightarrow \mp D_{jR}, & y & \quad U_{jR} \rightarrow -U_{jR}\end{aligned}$$

y demandando invarianza bajo estas simetrías discretas tenemos dos casos:

1. Cuando usamos $D_{jR} \rightarrow -D_{jR}$ debemos dejar fuera $\eta_{ij}^{U,0}$ y $\eta_{ij}^{D,0}$. Así Φ_1 se desacopla del sector Yukawa y sólo Φ_2 se acopla y da masas a los sectores *up* y *down*. Este caso se conoce como el tipo *I 2HDM*.
2. Cuando usamos $D_{jR} \rightarrow D_{jR}$ entonces $\eta_{ij}^{U,0}$ y $\xi_{ij}^{D,0}$ desaparece entonces Φ_1 se acopla y genera masas del sector *down* mientras Φ_2 se acopla y genera masas del sector *up*. En este caso lo llamaremos, el *2HDM* tipo *II*.

En el sistema más general de modelos de dobletes multi-Higgs, éste mecanismo de supresión adquiere carácter de teorema, el teorema de Glashow y Weinberg, dice que los procesos *FCNC* en donde ocurre un intercambio de Higgs están ausentes en tres niveles en un modelo de doblete multi-Higgs general si todos los fermiones de una carga eléctrica dada se acoplan a no más de un doblete Higgs.

Los Lagrangianos tipo I y II discutidos arriba claramente cumplen el teorema. Es importante decir que podemos usar el mismo tipo de acoplamientos para tanto los sectores quark y leptón o por otro lado, podemos tratarlos asimétricamente dando un total de cuatro diferentes Lagrangianos.

Así, los Lagrangianos Yukawa tipo I y II pueden también ser generados de una simetría global continua. El conjunto de transformaciones

$$\begin{aligned}\Phi_1 &\rightarrow \Phi_1, & y & \Phi_2 \rightarrow \varrho^{i\varphi}\Phi_2 \\ D_{jR} &\rightarrow \varrho^{-i\omega}D_{jR}, & y & U_{jR} \rightarrow \varrho_{jR}^{-i\varphi}\end{aligned}$$

lleva a los modelos tipo I y II respectivamente.

La simetría discreta viene de un caso especial de simetría continua cuando fijamos $\varphi = \pi$. Sin embargo, debemos recordar que la simetría discreta lleva a un potencial Higgs el cual es fenomenológicamente diferente del generado por la simetría global continua como se vió en la sección (2.1).

Sin embargo, la simetría discreta (o global) no es compulsiva y nosotros debemos explorar la posibilidad de tener todo el modelo de la (2.16) incluyendo la $FCNC$, y observar las restricciones que las mediciones experimentales imponen en la región de los parámetros del modelo. Cuando hemos tomado en cuenta todos los términos en (2.16), los dos dobletes Higgs se acoplan y generan masas tanto de fermiones del tipo up como del tipo $down$, en ese caso la llamaremos la $2HDM$ tipo III .

De la anterior discusión, concluimos que las reglas de Feynman del Lagrangiano Yukawa son altamente dependientes del modelo, y podrían ser integradas o suprimidas respecto al Modelo Estándar en contraste con los acoplamientos cinéticos que son siempre suprimidos. Consecuentemente, la fenomenología es muy sensitiva con la elección en el sector Yukawa.

3. MODELOS DE NORMA MÍNIMOS CON SIMETRÍA IZQUIERDA-DERECHA

Las simetrías con simetría **izquierda-derecha** son modelos de norma que van más allá del modelo Estándar en cuanto a predicciones físicas. Hay varias razones por las cuales las teorías $L - R$ son interesantes:

1. En ellas la violación de la paridad resulta de un rompimiento espontáneo de la simetría.
2. Incorporan plenamente la simetría quark-leptón de las interacciones débiles y dan al generador de $U(1)$ de la simetría electrodébil un nuevo propósito en términos de los números cuánticos $B - L$ y
3. permiten una explicación natural de la pequeñez de las masas de los neutrinos, relacionándolas con la ausencia de corrientes $V + A$ en procesos de baja energía. Estas teorías contienen dos bosones de norma cargados W , W_1 y W_2 . W_1 es el W del modelo estándar ya descubierto, el cual se acopla predominantemente a corrientes izquierdas. El W_2 , el cual debe ser mucho más pesado que el W_1 , se acopla predominantemente a corrientes derechas.

Las teorías también contienen bosones de norma neutros Z , Z_1 y Z_2 , el más liviano es el Z_1 que es el ya familiar Z^0 . En el sector fermiónico, estos modelos contienen los quarks y leptones cargados usuales, tres eigenestados de masa de neutrinos ligeros ν_1, ν_2 y ν_3 , y tres eigenestados de masa de neutrinos pesados, N_1 , N_2 y N_3 . Los ν_i se acoplan predominantemente a W_1 , y los neutrinos mucho más pesado N_i se acoplan predominantemente a W_2 . Estas teorías también contienen un sector de Higgs el cual incluye partículas físicas neutras, cargadas y doblemente cargadas.

3.1. Modelos mínimo con simetría izquierda-derecha

El modelo mínimo con simetría $L-R$ está basado en el grupo de norma $SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_{B-L}$. Con números cuánticos asignados en el orden $(I_{3L}, I_{3R}, B-L)$, los quarks y leptones se representan en dobletes izquierdos y derechos como sigue:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L ; \psi_2 = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L ; \psi_3 = \begin{pmatrix} \tau \\ \tau \end{pmatrix}_L ; \quad + \quad L \rightarrow R; \\
\psi_L &: (1/2, 0, -1), \quad \psi_R : (0, 1/2, -1); \\
Q_1 &= \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L ; Q_2 = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L ; \psi_3 = \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L ; \quad + \quad L \rightarrow R; \\
Q_L &: (1/2, 0, 1/3), \quad Q_R : (0, 1/2, 1/3);
\end{aligned} \tag{3.1}$$

En este modelo hay dos constantes libres de acoplamiento: $g_l = g_r = g$ para el grupo $SU(2)$ y g' para el grupo $U(1)_{B-L}$. La fórmula de **Gellman-Nishijima** para la carga eléctrica en este modelo es:

$$Q = I_{3L} + I_{3R} + (B - L)/2 \tag{3.2}$$

El mínimo sector de Higgs que nos lleva al patrón de rompimiento de la simetría

$$SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1) \longrightarrow SU(2)_L \otimes U(1)_Y \longrightarrow U(1)_{EM'} \tag{3.3}$$

consiste de los multipletes

$$\begin{aligned}
\phi &= \begin{pmatrix} \phi_1^0 & \phi_1^+ \\ \phi_2^- & \phi_2^0 \end{pmatrix}, \quad (1/2, 1/2, 0), \\
\Delta_L &= \begin{pmatrix} \Delta_L^+/\sqrt{2} & \Delta_L^{++} \\ \Delta_L^0 & -\Delta_L^+/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (1, 0, 2), \\
\Delta_R &= \begin{pmatrix} \Delta_R^+/\sqrt{2} & \Delta_R^{++} \\ \Delta_R^0 & -\Delta_R^+/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (0, 1, 2).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

El potencial de Higgs que involucra estos multipletes y que satisface la simetría $L - R$:

$$\Delta_L \longleftrightarrow \Delta_R, \quad \Phi \longleftrightarrow i\Phi^\dagger, \quad (3.5)$$

tiene la forma

$$\begin{aligned} V = & -\mu_1^2 \text{Tr} \phi^\dagger \phi + \lambda_1 (\text{Tr} \phi \phi^\dagger)^2 + \lambda_2 \text{Tr} \phi^\dagger \phi \phi^\dagger \phi + \frac{1}{2} \lambda_3 (\text{Tr} \phi^\dagger \tilde{\phi} + \text{Tr} \tilde{\phi} \phi^\dagger)^2 \\ & + \frac{1}{2} \lambda_4 (\text{Tr} \phi^\dagger \tilde{\phi} - \text{Tr} \tilde{\phi}^\dagger \phi)^2 + \lambda_5 \text{Tr} \phi^\dagger \phi \tilde{\phi}^\dagger \tilde{\phi} + \frac{1}{2} \lambda_6 (\text{Tr} \phi^\dagger \tilde{\phi} \phi^\dagger \tilde{\phi} \\ & + \text{Tr} \tilde{\phi}^\dagger \phi \tilde{\phi}^\dagger \phi) - \mu_2^2 (\text{Tr} \Delta_L^\dagger \Delta_L + \text{Tr} \Delta_R^\dagger \Delta_R) + \rho_1 [(\text{Tr} \Delta_L^\dagger \Delta_L)^2 + (\text{Tr} \Delta_R^\dagger \Delta_R)^2] \\ & + \rho_2 (\text{Tr} \Delta_L^\dagger \Delta_L \Delta_L^\dagger \Delta_L + \text{Tr} \Delta_R^\dagger \Delta_R \Delta_R^\dagger \Delta_R) + \rho_3 (\text{Tr} \Delta_L^\dagger \Delta_L) (\text{Tr} \Delta_R^\dagger \Delta_R) \\ & + \alpha_1 \text{Tr} \phi^\dagger \phi (\text{Tr} \Delta_L^\dagger \Delta_L + \text{Tr} \Delta_R^\dagger \Delta_R) + \alpha_2 (\text{Tr} \Delta_R^\dagger \phi^\dagger \phi \Delta_R + \text{Tr} \Delta_L^\dagger \phi \phi^\dagger \Delta_L) \\ & \alpha'_2 (\text{Tr} \Delta_R^\dagger \tilde{\phi}^\dagger \tilde{\phi} \Delta_R + \text{Tr} \Delta_L \tilde{\phi} \tilde{\phi}^\dagger \Delta_L) + \beta_1 \text{Tr} \Delta_L^\dagger \phi \Delta_R \phi^\dagger + \beta_2 \text{Tr} \Delta_L^\dagger \phi \Delta_R \tilde{\phi}^\dagger \\ & + \beta_3 \text{Tr} \Delta_L^\dagger \tilde{\phi} \Delta_R \tilde{\phi}^\dagger, \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde $\tilde{\phi} = \tau_2 \phi^* \tau_2$. Si se excluye los términos con coeficientes β_i , entonces el potencial satisface la simetría discreta adicional:

$$\Delta_L \leftrightarrow \Delta_L, \quad \Delta_R \longleftrightarrow -\Delta_R, \quad \phi \longleftrightarrow i\phi \quad (3.7)$$

El mínimo del potencial de (3.6) corresponde a los siguientes valores esperados del vacío para ϕ , Δ_L y Δ_R :

$$\langle \phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa' \end{pmatrix}; \quad \langle \Delta_L \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V_L & 0 \end{pmatrix}; \quad \langle \Delta_R \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V_R & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Los bosones W_L y W_R , los cuales se acoplan, respectivamente, a las corrientes puramente izquierdas y puramente derechas, están dados como una mezcla de W_1 y W_2 :

$$\begin{aligned} W_L &= W_1 \cos \varepsilon - W_2 \sin \varepsilon; \\ W_R &= W_1 \sin \varepsilon + W_2 \cos \varepsilon; \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde el ángulo de mezcla está dado por

$$\tan \epsilon = \frac{\kappa \kappa'}{V_R^2}. \quad (3.10)$$

y W_1 y W_2 son eigenestados de masa con:

$$\begin{aligned} M_{W_1}^2 &\simeq \frac{1}{4} g^2 (\kappa^2 + \kappa'^2 + 2V_L^2); \\ M_{W_2}^2 &\simeq \frac{1}{4} g^2 (\kappa^2 + \kappa'^2 + 2V_R^2). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Por otra parte los bosones Z_L y Z_R se acoplan a ambas corrientes, izquierda y derechas. Estos bosones están dados como una mezcla de Z_1 y Z_2

$$\begin{aligned} Z_L &= Z_1 \cos \zeta - Z_2 \sin \zeta, \\ Z_R &= Z_1 \sin \zeta + Z_2 \cos \zeta \end{aligned} \quad (3.12)$$

con

$$\sin \zeta \simeq \frac{g^3 (g^2 + g'^2)^{1/2}}{4(g^2 + g'^2)^2} \left(\frac{\kappa^2 + \kappa'^2}{V_R^2} \right),$$

donde los Z_1 y Z_2 son eigenestados de masa con

$$\begin{aligned} M_{Z_1}^2 &\simeq \frac{1}{4 \cos^2 \theta_W} g^2 (\kappa^2 + \kappa'^2 + 2V_L^2); \\ M_{Z_2}^2 &\simeq 2(\kappa^2 + \kappa'^2) V_R^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde θ_W es el ángulo de mezcla débil del modelo estándar, el cual está relacionado con las constantes de acoplamiento de dicho modelo por:

$$\sin \theta_W = \frac{g'}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} \quad (3.14)$$

El acoplamiento de Yukawa más general para dar masa a la primera familia de quarks y leptones, esta dado por donde las h_i son constantes arbitrarias, $\phi' = \phi + \langle \phi \rangle_0$, $\Delta'_L = \Delta_L + \langle \Delta_L \rangle_0$, $\Delta'_R = \Delta_R + \langle \Delta_R \rangle_0$ y C es la matriz de conjugación de catga de Dirac. Esto conduce a las siguientes masas de fermiones cargados

$$\begin{aligned} m_e &= h_1 \kappa' + h_2 \kappa; \\ m_u &= h_3 \kappa + h_4 \kappa'; \\ m_d &= h_3 \kappa' + h_4 \kappa. \end{aligned} \quad (3.15)$$

De las dos últimas ecuaciones podemos ver que κ y κ' no pueden ser iguales, ya que de lo contrario las masas de los quarks *up* y *down* serian iguales, lo cual es contrario a las observaciones. Entonces podemos elegir a uno de los valores esperados del vacío como dominante, entonces, podemos elegir κ como dominante y, para simplificar, tomaremos a $\kappa' = 0$ esto nos lleva a que el ángulo de mezcla (3.10) sea nulo, lo cual conduce a que $W_{1,2} = W_{L,R}$. Por otra parte, para el sector ν_L y ν_R

$$\mathcal{L}_{masa} = h_5(\nu_L\nu^T C\nu - V_R N^T C N) + h_1\kappa\nu^T C N + H.C., \quad (3.16)$$

donde $\nu = \nu_L$ y $N = C(\bar{\nu}_R)^T$. De esta última ecuación podemos obtener

$$\begin{aligned} \nu_e &= \nu \cos \alpha + N \sin \alpha; \\ N_e &= -\nu \sin \alpha + N \cos \alpha; \end{aligned} \quad (3.17)$$

con

$$\tan 2\alpha = -\frac{h_1\kappa}{h_5(V_R + V_L)} \quad (3.18)$$

y las masas dadas por

$$\begin{aligned} M_{\nu_e} &\simeq (h_5\gamma + \frac{h_1^5}{4h_5})\frac{\kappa^2}{V_R}; \\ M_{N_e} &= -h_5V_R, \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde γ es una razón de parámetros que intervienen en el potencial de Higg

$$\gamma = \frac{\beta_2}{4(\rho_1 + \rho_2) - 2\rho_3} \quad (3.20)$$

Por otro parte, para tener una máxima violación de paridad a bajas energías, debemos escoger $\kappa \ll V_R$. Además, en el proceso de minimizar el potencial de Higgs se encuentra que $V_l = \gamma\kappa^2/V_R$, lo cual nos indica que $V_L \ll \kappa$, pudiéndose ignorar V_L . Entonces obtenemos:

$$\begin{aligned} M_{WL}^2 &\simeq \frac{g^2\kappa^2}{4}; \\ M_{WR}^2 &\simeq \frac{g^2V_R^2}{2}; \\ M_{ZL}^2 &\simeq \frac{g^2\kappa^2}{4\cos^2\theta_W}; \\ M_{ZR}^2 &\simeq 2(g^2 + g'^2)V_R^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Se puede observar de las ecuaciones (3.19) que en el límite $M_{WR} \rightarrow \infty$ ($V_R \rightarrow \infty$), $M_{Ne} \rightarrow \infty$ y $M_{\nu_e} \rightarrow 0$ en cuyo caso las corrientes débiles vienen a ser puramente izquierdas, en otras palabras, en el límite de corrientes $V - A$ la teoría lleva de manera natural a la nulidad de la masa del neutrino.

CONCLUSIONES

1. El modelo con dos dobletes de Higgs genera de forma natural las masas de los fermiones del tipo *up* y tipo *down*.
2. Los modelos con simetría izquierda-derecha permiten una explicación de la masa de los neutrinos, la cual está relacionada con la ausencia de corrientes $V + A$ en procesos de bajas energías.

RECOMENDACIONES

1. Se sugiere continuar con el estudio de uno de los temas de actualidad como son los distintos mecanismos para generar masas, ya que es la base fundamental para comprender algunos de los resultados que se estarán realizando en el CERN (proyecto ALICE).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Kane, Gordon. **Modern Elementary Particle Physics**, Perseus Books Publishing, Universidad de Michigan, Michigan, USA, 1993.
- [2] Garcia Hidalgo, Rosa Magdalena. **Producción de Bosones de Norma Masivos en la Colisión Neutrino-Protón con Neutrinos Cósmicos Ultraenergéticos**, tesis doctoral, asesor: Dr. Alfonso Rosado Sánchez, Benemérita Universidad de Puebla, Instituto de Física 'Luis Rivera Terrazas', 2003.
- [3] W. Greiner. **Relativistic Quantum Mechanics**, Springer-Verlag, Alemania, 1990.

APÉNDICE

A.1. Condición mínima para el potencial

El potencial puede escribirse en términos de los siguientes operadores hermíticos invariantes de norma

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \Phi_1^\dagger \Phi_1, \hat{B} = \Phi_2^\dagger \Phi_2, \hat{C} = \frac{1}{2}(\Phi_1^\dagger \Phi_2 + \Phi_2^\dagger \Phi_1) = \text{Re}(\Phi_1^\dagger \Phi_2), \\ \hat{D} &= -\frac{i}{2}(\Phi_1^\dagger \Phi_2 - \Phi_2^\dagger \Phi_1) = \text{Im}(\Phi_1^\dagger \Phi_2)\end{aligned}$$

la forma más general renormalizable y con potencial invariante bajo $SU(2) \times U(1)$ es dado por

$$\begin{aligned}V_g &= -\mu_1^2 \hat{A} - \mu_2^2 \hat{B} - \mu_3^2 \hat{C} - \mu_4^2 \hat{D} + \lambda_1 \hat{A}^2 + \lambda_2 \hat{B}^2 + \lambda_3 \hat{C}^2 + \lambda_4 \hat{D}^2 \\ &\quad + \lambda_5 \hat{A} \hat{B} + \lambda_6 \hat{A} \hat{C} + \lambda_8 \hat{A} \hat{D} + \lambda_7 \hat{B} \hat{C} + \lambda_9 \hat{B} \hat{D} + \lambda_{10} \hat{C} \hat{D}\end{aligned}\tag{A.22}$$

por otra parte, consideremos por simplicidad los siguiente

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_5 + i\phi_6 \\ \phi_7 + i\phi_8 \end{pmatrix}\tag{A.23}$$

Asumamos que para ambos VEV pueden considerarse reales, es decir no hay violación espontánea CP, de modo que $\langle \phi_3 \rangle = v_1/\sqrt{2}$; $\langle \phi_7 \rangle = v_2/\sqrt{2}$. Evaluando las condiciones minimas, para los valores anteriores obtenemos,

$$T_i = \frac{\partial V}{\partial \phi_i} = 0$$

Donde ϕ_i , con $i = 1, \dots, 8$ denota cada eigenestado de los escalares definidos en (A.23). Entonces nosotros obtenemos los siguientes valores no triviales

$$\begin{aligned}0 = T_3 &= \frac{1}{4}\lambda_7 v_2^3 + \lambda_1 v_1^3 + \frac{3}{4}\lambda_6 v_1^2 v_2 - \mu_1^2 v_1 + \frac{1}{2}\lambda_3 v_2^2 v_1 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1 v_2^2 - \frac{1}{2}\mu_3^2 v_2 \\ 0 = T_4 &= (-2\mu_4^2 + \lambda_9 v_2^2 + \lambda_8 v_1^2 + \lambda_{10} v_2 v_1) v_2 \\ 0 = T_7 &= \frac{3}{4}\lambda_7 v_2^2 v_1 - \mu_2^2 v_2 + \lambda_2 v_2^3 - \frac{1}{2}\mu_3^2 v_1 + \frac{1}{4}\lambda_6 v_1^3 + \frac{1}{2}\lambda_3 v_1^2 v_2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_2 v_1^2 \\ 0 = T_8 &= (2\mu_4^2 + \lambda_9 v_2^2 + \lambda_8 v_1^2 + \lambda_{10} v_2 v_1) v_1\end{aligned}\tag{A.24}$$

ahora, las masas son obtenidas por los términos cuadráticos en los escalares

$$M_{ij}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \quad (\text{A.25})$$

de (A.22), (A.23) y (A.25) las masas son:

$$\begin{pmatrix} M_{11}^2 & 0 & 0 & 0 & M_{15}^2 & M_{16}^2 & 0 & 0 \\ 0 & M_{22}^2 & 0 & 0 & M_{25}^2 & M_{26}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33}^2 & M_{34}^2 & 0 & 0 & M_{37}^2 & M_{38}^2 \\ 0 & 0 & M_{34}^2 & M_{44}^2 & 0 & 0 & M_{47}^2 & M_{48}^2 \\ M_{15}^2 & M_{25}^2 & 0 & 0 & M_{55}^2 & 0 & 0 & 0 \\ M_{16}^2 & M_{26}^2 & 0 & 0 & 0 & M_{66}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{37}^2 & M_{47}^2 & 0 & 0 & M_{77}^2 & M_{78}^2 \\ 0 & 0 & M_{38}^2 & M_{48}^2 & 0 & 0 & M_{87}^2 & M_{88}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Donde los elementos de la matriz son

$$\begin{aligned} M_{11}^2 &= -\mu_1^2 + \lambda_1 V_1^2 + \frac{1}{2} \lambda_5 v_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_6 v_1 v_2 \\ M_{15}^2 &= -\mu_3^2 + \frac{1}{2} \lambda_3 v_1 v_2 + \frac{1}{4} \lambda_6 v_1^2 + \frac{1}{4} \lambda_7 v_2^2 \\ M_{16}^2 &= -\mu_4^2 + \frac{1}{2} \lambda_{10} v_1 v_2 + \frac{1}{4} \lambda_8 v_1^2 + \frac{1}{4} \lambda_9 v_2^2 \\ M_{22}^2 &= -\mu_1^2 + \lambda_1 V_1^2 + \frac{1}{2} \lambda_5 v_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_6 v_1 v_2 \\ M_{25}^2 &= -\frac{1}{4} \lambda_9 v_2^2 + \frac{1}{4} \lambda_{10} v_1 v_2 + \frac{1}{2} \mu_4^2 + \frac{1}{4} \lambda_8 v_1^2 \\ M_{26}^2 &= -\frac{1}{2} \mu_3^2 + \frac{1}{4} \lambda_7 v_2^2 + \frac{1}{4} \lambda_6 v_1^2 + \frac{1}{2} \lambda_3 v_1 v_2 \\ M_{33}^2 &= -\mu_1^2 + 3\lambda_1 V_1^2 + \frac{1}{2} \lambda_3 v_1^2 + \frac{1}{2} \lambda_5 v_2^2 + \frac{3}{2} \lambda_6 v_1 v_2 \\ M_{34}^2 &= -\frac{1}{2} \lambda_8 v_1 v_2 - \frac{1}{4} \lambda_{10} v_2^2 \\ M_{37}^2 &= -\frac{1}{2} \mu_3^2 + \frac{3}{4} \lambda_7 v_2^2 + \frac{3}{4} \lambda_6 v_1^2 + \lambda_5 v_1 v_2 + \lambda_3 v_1 v_2 \\ M_{38}^2 &= \frac{1}{4} \lambda_9 v_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_{10} v_1 v_2 - \frac{1}{2} \mu_4^2 + \frac{3}{4} \lambda_8 v_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{44}^2 &= -\mu_1^2 + \lambda_1 V_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_4 v_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_6 v_1 v_2 \\
M_{47}^2 &= \frac{3}{4}\lambda_9 v_2^2 - \frac{1}{2}\lambda_{10} v_1 v_2 + \frac{1}{2}\mu_4^2 - \frac{1}{4}\lambda_8 v_1^2 \\
M_{48}^2 &= -\frac{1}{2}\mu_3^2 + \frac{1}{4}\lambda_7 v_2^2 + \frac{1}{4}\lambda_6 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_3 v_1 v_2 - \lambda_4 v_1 v_2 \\
M_{55}^2 &= -\mu_2^2 + \lambda_2 v_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_7 v_1 v_2 \\
M_{66}^2 &= -\mu_2^2 + \lambda_2 v_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_7 v_1 v_2 \\
M_{77}^2 &= -\mu_2^2 + 3\lambda_2 v_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_3 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2 + \frac{3}{2}\lambda_7 v_1 v_2 \\
M_{78}^2 &= \frac{1}{2}\lambda_9 v_2 v_1 + \frac{1}{4}\lambda_{10} v_1^2 \\
M_{88}^2 &= -\mu_2^2 + \lambda_2 v_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_4 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_7 v_1 v_2
\end{aligned} \tag{A.27}$$

Dado que $v_2 = 0$ es una solución de (A.24), entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
M_{11}^2 &= 0; & M_{15}^2 &= 0; & M_{16}^2 &= \frac{1}{2}\lambda_8 v_1^2; & M_{22}^2 &= 0; & M_{25}^2 &= -\frac{1}{2}\lambda_8 v_1^2 \\
M_{26}^2 &= 0; & M_{33}^2 &= 2\lambda_1 v_1^2; & M_{34}^2 &= 0; & M_{37}^2 &= \frac{1}{2}\lambda_6 v_1^2; & M_{38}^2 &= \lambda_8 v_1^2 \\
M_{44}^2 &= 0; & M_{47}^2 &= -\frac{1}{2}\lambda_8 v_1^2; & M_{48}^2 &= 0; & M_{55}^2 &= -\mu^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2 \\
M_{66}^2 &= -\mu_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2; & M_{77}^2 &= -\mu_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_3 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2 \\
M_{78}^2 &= \frac{1}{4}\lambda_{10} v_1^2; & M_{88}^2 &= -\mu_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_4 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2
\end{aligned}$$

Podemos ver que el potencial (A.22) viola explícitamente CP por medio de los términos $M_{16}, M_{25}, M_{34}, M_{38}, M_{47}, M_{78}$ en la matriz de masa (A.26), como se mezclan la parte real con la parte imaginaria del campo neutro complejo ϕ_1^0, ϕ_2^0 .

Antes de continuar con algunos casos especiales del potencial, introducimos una fórmula muy útil. Si tenemos una matriz simétrica de 2×2

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}$$

sus eigenvalores y eigenvectores ortonormales están dados por

$$\begin{aligned}
k_{1,2} &= \frac{1}{2} \left[a + b \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2} \right] \\
\begin{pmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} &\equiv \vec{u}_1 \leftrightarrow k_1; \quad \begin{pmatrix} -\sin \delta \\ \cos \delta \end{pmatrix} \equiv \vec{u}_2 \leftrightarrow k_2 \\
\sin 2\delta &= \frac{2c}{\sqrt{(a-b)^2 + 4c^2}}; \quad \cos 2\delta = \frac{(a-b)}{\sqrt{(a-b)^2 + 4c^2}}
\end{aligned} \tag{A.28}$$

A.2. El potencial con C - invarianza

De acuerdo con el capítulo dos, si demandamos que el potencial tenga C -invarianza, debemos de hacer $\mu_4^2 = \lambda_8 = \lambda_9 \lambda_{10} = 0$. Podemos tomar $\langle \phi_3 \rangle = v_1/\sqrt{2}$; $\langle \phi_7 \rangle = v_2/\sqrt{2} = 0$, sin perder generalidad.

Por lo tanto las minimas condiciones son reducidas únicamente a dos ecuaciones

$$\mu_1^2 = \lambda_1 v_1^2; \quad \mu_3^2 = \frac{\lambda_6 v_1^2}{2}$$

sustituyendo estos términos en la matriz de elementos obtenemos

$$\begin{aligned}
M_{15}^2 &= -\frac{1}{2}\mu_3^2 + \frac{1}{4}\lambda_6 v_1^2; \quad M_{33}^2 = 2\lambda_1 v_1^2; \quad M_{37}^2 = \frac{1}{2}\lambda_6 v_1^2 \\
M_{55}^2 &= -\mu_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2; \quad M_{66}^2 = -\mu_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2 \\
M_{77}^2 &= -\mu_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_3 v_1^2 + \frac{1}{5}\lambda_5 v_1^2; \quad M_{88}^2 = -\mu_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_4 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2
\end{aligned}$$

Ahora, si hacemos por simplicidad el siguiente cambio $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rightarrow 1, 2, 4, 6, 3, 7, 8$, entonces los elementos de esta nueva matriz son

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & M_{55}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & M_{66}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & M_{33}^2 & M_{37}^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & M_{73}^2 & M_{77}^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{88}^2
\end{pmatrix} \tag{A.29}$$

La cual la podemos descomponer de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{55}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{66}^2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} M_{33}^2 & M_{37}^2 \\ M_{73}^2 & M_{77}^2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{88}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.30})$$

Pero como $M_{55}^2 = M_{66}^2$ entonces tenemos que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{55}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{66}^2 = \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{55}^2 \end{pmatrix} \oplus I_{2 \times 2} \quad (\text{A.31})$$

Ahora comenzaremos por diagonalizar la matriz (A.31) que corresponde a los índices 1, 2, 5, 6. Los eigenvectores ortonormalizados y eigenvalores son

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \right\} &\rightarrow m_{G^+}^2 = 0 \\ \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \right\} &\rightarrow m_{H^+}^2 = -\mu_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2 \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Asi cada valor es doblemente degenerado. Por lo tanto corresponden a eigenestados cargados. El eigenvalor $m_{G^+}^2 = 0$ deberia corresponder al boson de Goldstone (masa escalar) porque $m_{H^+}^2 = -\mu_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2$ corresponde a la masa del boson de higgs cargado. De los valores obtenidos en (A.32) los eigenestados de masa son

$$\begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{pmatrix}$$

Pero tomando en cuenta que para definir el bosón escalar cargado de Higgs requerimos dos grados de libertad, los primeros dos campos escalares definen que la carga debe de ser del boson Goldstone G^+ , el cual es escrito como una combinación lineal de los escalares ϕ_1 y ϕ_2 . La función de ambos grados de libertad pude ser $(\phi_1, \phi_2)^T \rightarrow \phi_1 + i\phi_2 \equiv \phi^\dagger$; de la misma forma $(G_1, G_2)^T \rightarrow G_1 + iG_2 \equiv G^+$, algo similar sucede para $(\phi_5, \phi_6)^T \equiv \phi_2^\dagger$ y $(H_1, H_2)^T \equiv H^+$. La relación entre los

eigenestados de norma y los de masa de los campos escalares cargados puede ser simplificada como

$$\begin{pmatrix} G^+ \\ H^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_2^+ \end{pmatrix}$$

Por otra parte la matriz en (A.30) corresponde a los indices 3, 7.

$$\begin{pmatrix} M_{33}^2 & M_{37}^2 \\ M_{73}^2 & M_{77}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 v_1^2 & \frac{1}{2}\lambda_6 v_1^2 \\ \frac{1}{2}\lambda_6 v_1^2 & -\mu_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_3 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2 \end{pmatrix}$$

Aplicando (??) los eigenvalores y eigenvectores ortonormalizados son

$$m_{H^0, h^0}^2 = (\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_+)v_1^2 - \frac{1}{2}\mu_2^2 \pm \sqrt{[(\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_+)v_1^2 + \frac{1}{2}\mu_2^2]^2 + (\frac{1}{2}\lambda_6 v_1^2)^2}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \leftrightarrow m_{H^0}^2; \quad \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \leftrightarrow m_{h^0}^2$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\lambda_6 v_1^2}{(2\lambda_1 - \lambda_+)v_1^2 + \mu_2^2}; \quad \lambda_+ = \frac{1}{2}(\lambda_3 + \lambda_4)$$

Por lo tanto, la diagonalización se lleva a cabo por la siguiente rotacion de los eigenestados de norma

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\phi_3 - v_1 \\ \sqrt{2}\phi_7 - v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^0 \\ h^0 \end{pmatrix}$$

pero acordandonos de la parametrización de (A.23) y (ref2.2) de los dobletes de Higgs

$$\left(\sqrt{2}\phi_{3,7} - v_{1,2} \rightarrow h_{1,2} \right)$$

obtenemos

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^0 \\ h^0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, digonalizando la submatriz correspondiente a los elementos 4,8 en (A.30)

$$\begin{pmatrix} G^+ \\ H^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{44}^2 & M_{48}^2 \\ M_{84}^2 & M_{88}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mu_2^2 + \frac{1}{2}(\lambda_4 + \lambda_5)v_1^2 \end{pmatrix}$$

cuyos eigenvectores y eigenvalores son

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -\mu_2^2 + \frac{1}{2}v_1^2\lambda_4 + \frac{1}{2}v_1^2\lambda_5$$

Donde se observa

$$m_{G^0} = 0; \quad m_{A^0} = -\mu_2^2 + \frac{1}{2}(\lambda_4 + \lambda_5)v_1^2$$

y la masa de los eigenestados son dados por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_4 \\ \phi_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^0 \\ A^0 \end{pmatrix}$$

A.3. El potencial con una invarianza Z_2

Una forma de evitar una violación espontanea CP consiste en exigir invarianza sobre la simetría Z_2 $\Phi_1 \rightarrow \Phi_1, \Phi_2 \rightarrow -\Phi_2$ (así como la invarianza C) y corresponde a poner $\mu_3^2 = \mu_4^2 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = \lambda_{10} = 0$ en (A.22). Las condiciones mínimas (A.24) son reducidas a dos ecuaciones:

$$v_1[-\mu_1^2 + \lambda_1 v_1^2 + \lambda_+ v_2^2] = 0$$

$$v_2[-\mu_2^2 + \lambda_2 v_2^2 + \lambda_+ v_1^2] = 0$$

donde $\lambda_+ = \frac{1}{2}(\lambda_3 + \lambda_5)$. Así, tenemos dos conjuntos de soluciones independientes

a)

$$v_1^2 = \frac{\lambda_2 \mu_1^2 - \lambda_+ \mu_2^2}{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_+^2};$$

$$v_2^2 = \frac{\lambda_1 \mu_2^2 - \lambda_+ \mu_1^2}{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_+^2}$$

ó b)

$$v_2^2 = 0;$$

$$v_1^2 = \frac{\mu_1^2}{\lambda_1}$$

Primer conjunto de soluciones

La matriz de masa descompuesta, despues de usar las condiciones mínimas, renombrando y tomando en cuenta que $M_{15}^2 = M_{26}^2, M_{11}^2 = M_{22}^2, y M_{55}^2 = M_{66}^2$ se vuelve

$$M_{tot}^2 = \left[\begin{pmatrix} M_{11}^2 & M_{15}^2 \\ M_{15}^2 & M_{55}^2 \end{pmatrix} \otimes I_{2 \times 2} \right] \oplus \begin{pmatrix} M_{33}^2 & M_{37}^2 \\ M_{37}^2 & M_{77}^2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} M_{44}^2 & M_{48}^2 \\ M_{48}^2 & M_{88}^2 \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} M_{11}^2 &= -\frac{1}{2}v_2^2\lambda_3; & M_{15}^2 &= \frac{1}{2}\lambda_3v_1v_2; & M_{22}^2 &= -\frac{1}{2}v_2^2\lambda_3; & M_{26}^2 &= \frac{1}{2}\lambda_3v_1v_2 \\ M_{33}^2 &= 2\lambda_1v_1^2; & M_{37}^2 &= 2\lambda_+v_1v_2; & M_{44}^2 &= \lambda_-v_2^2; & M_{48}^2 &= -\lambda_-v_1v_2 \\ M_{55}^2 &= -\frac{1}{2}v_1^2\lambda_3; & M_{66}^2 &= -\frac{1}{2}v_1^2\lambda_3; & M_{77}^2 &= -2\lambda_2v_2^2; & M_{88}^2 &= \lambda_-v_1^2 \end{aligned}$$

donde $\lambda_- \equiv \frac{1}{2}(\lambda_4 - \lambda_3)$. Primero diagonalizamos la submatriz correspondiente a (1.5). Los eigenvalores y los eigenvectores ortonormales son

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{v_2}{v_1} \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0,$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{v_2}{v_1} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{(v_1^2 + v_2^2)(\mu_3^2 - \lambda_3v_1v_2)}{v_1v_2}$$

que pueden escribirse como

$$\begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \leftrightarrow 0; \quad \begin{pmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix} \leftrightarrow -\frac{1}{2}v_1^2\lambda_3 - \frac{1}{2}v_2^2\lambda_3$$

$$\cos \beta = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}; \quad \sin \beta = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Así, la masa del bosón de Higgs y la masa de los eigenestados son

$$\begin{pmatrix} G^+ \\ H^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_2^+ \end{pmatrix}$$

$$m_{G^+}^2 = 0, \quad m_{H^+}^2 = -\frac{1}{2}\lambda_3(v_1^2 + v_2^2)$$

En cuanto al índice 3, 7 Los eigenvectores y eigenvalores son evaluados por (refA.7)

$$m_{H^0, h^0} = \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 \pm \sqrt{(\lambda_1 v_1^2 - \lambda_2 v_2^2)^2 + 4\lambda_+^2 v_1^2 v_2^2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2v_1 v_2 \lambda_+}{(\lambda_1 v_1^2 - \lambda_2 v_2^2)}$$

$$\begin{pmatrix} H^0 \\ h^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, para el índice 4, 8 se obtiene

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_4 \\ \phi_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$$

$$m_{G^0}^2 = 0, \quad m_{A^0}^2 = -\frac{1}{2}(\lambda_4 - \lambda_3)(v_1^2 + v_2^2)$$

Segundo conjunto de soluciones

La matriz de masa combinado con las condiciones mínimas está dada por:

$$\begin{aligned} M_{ij}^2 &= \left[\begin{pmatrix} M_{11}^2 & M_{15}^2 \\ M_{15}^2 & M_{55}^2 \end{pmatrix} \otimes I_{2 \times 2} \right] \oplus \begin{pmatrix} M_{33}^2 & M_{37}^2 \\ M_{37}^2 & M_{77}^2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} M_{44}^2 & M_{48}^2 \\ M_{48}^2 & M_{88}^2 \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mu_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2 \end{pmatrix} \otimes I_{2 \times 2} \right] \oplus \begin{pmatrix} 2\lambda_1 v_1^2 & 0 \\ 0 & -\mu_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_3 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2 \end{pmatrix} \\ &\quad \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mu_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_4 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En este caso la matriz es ya diagonal y consecuentemente los eigenestados de masa coinciden con los eigenestados de norma, los elementos en la diagonal son los eigenvalores, es decir, el cuadrado de las masas de los bosones de Higgs. Dado

$M_{55}^2 = M_{66}^2$, ellos corresponden a dos partículas degeneradas en masa (es decir, dos partículas cargadas), en suma, otros dos grados de libertad pueden ser asociados a sus correspondientes bosones de Goldstone. Así, encontramos

$$\begin{aligned}\phi_1^+ &= H^+; \quad \phi_2^+ = G^+; \quad \phi_3 = H^0; \quad \phi_7 = h^0; \quad \phi_4 = G^0; \quad \phi_8 = A^0 \\ m_{G^+}^2 &= 0; \quad m_{H^+}^2 = -\mu_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1^2; \quad m_{H^0}^2 = 2\lambda_1 v_1^2 \\ m_{h^0}^2 &= -\mu_2^2 + \frac{1}{2}(\lambda_3 + \lambda_5)v_1^2; \quad m_{G^0}^2 = 0; \quad m_{A^0}^2 = -\mu_2^2 + \frac{1}{2}(\lambda_4 + \lambda_5)v_1^2\end{aligned}$$

El potencial con la simetría global $U(1)$

Como se explicó en el capítulo dos otra forma de evitar la violación espontánea CP consiste de imponer invarianza bajo la simetría $U(1)$ global $\Phi_2 \rightarrow e^{i\varphi}\Phi_2$ (como la invarianza C) y corresponde a poner $\lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = \lambda_{10} = \mu_4^2 = 0$ y $\lambda_3 = \lambda_4$ en (A.22). En este caso podemos asumir que, en general, $v_1, v_2 \neq 0$. Las condiciones mínimas (A.24) son reducidas a dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}\lambda_1 v_1^3 - \mu_1^2 v_1 + \frac{1}{2}\lambda_3 v_2^2 v_1 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_1 v_2^2 - \frac{1}{2}\mu_3^2 v_2 &= 0 \\ -\mu_2^2 v_2 + \lambda_2 v_2^3 - \frac{1}{2}\mu_3^2 v_1 + \frac{1}{2}\lambda_3 v_1^2 v_2 + \frac{1}{2}\lambda_5 v_2 v_1^2 &= 0\end{aligned}$$

y después de reorganizar los elementos de la matriz como 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rightarrow 1, 2, 5, 6, 3, 7, 4, 8; utilizando las condiciones mínimas, y tomando en cuenta que $M_{15}^2 = M_{26}^2, M_{11}^2 = M_{22}^2, y M_{55}^2 = M_{66}^2$ la matriz descompuesta se vuelve

$$M_{tot}^2 = \left[\begin{pmatrix} M_{11}^2 & M_{15}^2 \\ M_{15}^2 & M_{55}^2 \end{pmatrix} \otimes I_{2 \times 2} \right] \oplus \begin{pmatrix} M_{33}^2 & M_{37}^2 \\ M_{37}^2 & M_{77}^2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} M_{44}^2 & M_{48}^2 \\ M_{48}^2 & M_{88}^2 \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{aligned}M_{11}^2 &= \frac{1}{2}\mu_3^2 \frac{v_2}{v_1} - \frac{1}{2}\lambda_3 v_2^2; \quad M_{15}^2 = -\frac{1}{2}\mu_3^2 + \frac{1}{2}\lambda_3 v_1 v_2 \\ M_{33}^2 &= \frac{1}{2}\mu_3^2 \frac{v_2}{v_1} + 2\lambda_1 v_1^2; \quad M_{37}^2 = -\frac{1}{2}\mu_3^2 + \lambda_5 v_1 v_2 + \lambda_3 v_1 v_2 \\ M_{44}^2 &= \frac{1}{2}\mu_3^2 \frac{v_2}{v_1}; \quad M_{48}^2 = -\frac{1}{2}\mu_3^2; \quad M_{55}^2 = \frac{1}{2}\mu_3^2 \frac{v_1}{v_2} - \frac{1}{2}\lambda_3 v_1^2\end{aligned}$$

$$M_{77}^2 = \frac{1}{2}\mu_3^2 \frac{v_2}{v_1} + 2\lambda_2 v_2^2; M_{88}^2 = \frac{1}{2}\mu_3^2 \frac{v_1}{v_2}$$

Los eigenvalores y la matriz de rotación correspondiente a la submatriz de índices 1, 5 son

$$\begin{pmatrix} G^+ \\ H^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_2^+ \end{pmatrix}$$

$$m_{G^+} = 0, \quad m_{H^+} = \frac{1}{2} \frac{(v_1^2 + v_2^2)(\mu_3^2 - \lambda_3 v_1 v_2)}{v_1 v_2}$$

por los índices 3, 7 los eigenvalores y el ángulo de rotación son

$$m_{H^0, h^0}^2 = \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \frac{1}{4}\mu_3^2(\tan \beta + \cot \beta) \pm R_\lambda$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2v_1 v_2 \lambda_+ - \frac{1}{2}\mu_3^2}{\lambda_1 v_1^2 - \lambda_2 v_2^2 + \frac{1}{4}\mu_3^2(\tan \beta - \cot \beta)}$$

$$R_\lambda \equiv \sqrt{\left[\lambda_1 v_1^2 - \lambda_2 v_2^2 + \frac{1}{4}\mu_3^2(\tan \beta - \cot \beta) \right]^2 + \left(2v_1 v_2 \lambda_+ - \frac{1}{2}\mu_3^2 \right)^2}$$

finalmente para los índices 4, 8 el ángulo de rotación es β nuevamente

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\phi_4 - v_1 \\ \sqrt{2}\phi_8 - v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^0 \\ A^0 \end{pmatrix}$$

y los eigenvalores son:

$$m_{G^0} = 0, \quad m_{A^0} = \frac{1}{2}\mu_3^2 \frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1 v_2}$$